Facoltà di ECONOMIA – Università di Pavia

20 Novembre 2007

Prova scritta di Statistica (Istituzioni) di

Statistica 1 (Elementi di Probabilità e di Inferenza)

e di Statistica 1

Riportare su ciascun foglio

- Nome, cognome e numero di matricola

DOMANDE DI "TEORIA". (peso 30%)

a) Siano $X_1, \dots, X_{100}$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite secondo una legge bernoulliana di parametro $p = 0.3$. Qual è, approssimativamente, la legge di probabilità della media campionaria $\bar{X}_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i/100$?

b) Sia T_n uno stimatore del parametro incognito θ tale che $E_\theta(T_n^2) < \infty$, per ogni $\theta \in \Theta$. Si dia la definizione di errore quadratico medio di T_n

c) Siano X una variabile aleatoria distribuita secondo una legge esponenziale negativa di parametro $\lambda = 1/4$. Determinare $E(4X)$ e $\mathrm{Var}(4X)$.

ESERCIZIO 1. (peso 35%)

Il tempo (espresso in ore) di attesa in coda per il check–in in un aereoporto internazionale è una variabile aleatoria con legge esponenziale negativa. Si ricorda che una variabile aleatoria X con legge esponenziale negativa di parametro λ ha densità $f_X(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ per $x > 0$ e $\lambda > 0$. Si supponga che il tempo medio di attesa sia di 1/3 (equivalente a 20 minuti).

a) Qual è la probabilità che un qualsiasi passeggero debba attendere per più di 30 minuti, ovvero che il tempo d'attesa sia superiore a 1/2?

b) Calcolare la probabilità che, su 10 passeggeri, due passeggeri attendano in coda per più di 30 minuti.

c) Si considerino 100 passeggeri e si ipotizzi che il tempo di attesa per ciascuno di essi sia independente da quello di tutti gli altri. Qual è la probabilità che almeno 30 di essi attendano in coda per più 30 minuti?

ESERCIZIO 2. (peso 35%)

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione X distribuita secondo una legge esponenziale negativa di parametro λ incognito.

a) Si proponga uno stimatore non distorto di $1/\lambda$.

b) Si valuti l'errore quadratico medio associato allo stimatore non distorto proposto al punto a).

c) Si dimostri che lo stimatore non distorto proposto al punto a) è consistente in senso forte.

SOLUZIONI

1a) $P(X > 1/2) = \mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.223$
1b) $P(N = 2) = \binom{10}{2}\, 0.223^2(1 - 0.223)^8 \approx 0.297$
1c) Se $S = X_1 + \ldots X_{100}$ con $X_i \sim \mathrm{bern}(0.223)$, allora

$$P\left(S > 30\right) = P\left(\frac{S - 22.3}{\sqrt{100 \times 0.223 \times (1 - 0.223)}} > \frac{30 - 22.3}{\sqrt{100 \times 0.223 \times (1 - 0.223)}}\right)$$

$$\approx P(Z > 1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678 = 0.0322$$