Facoltà di ECONOMIA – Università di Pavia

19 Giugno 2007

Prova scritta di Statistica (Istituzioni)

di Statistica 1 (Elementi di Probabilità e di Inferenza) e di Statistica 1

Modalità A

Riportare su ciascun foglio:

1. nome e cognome
2. numero di matricola
3. modalità (A o B)

Utilizzare un foglio diverso per la soluzione di ciascun esercizio

DOMANDE DI "TEORIA". (peso: 30%)

a) Sia $X_1, \ldots, X_{10}$ un campione casuale estratto da una popolazione X distribuita secondo una legge esponenziale negativa di parametro $\theta > 0$. Sapendo che lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_{10}$, determinare uno stimatore di massima verosimiglianza di $h(\theta) = Var_\theta(X) = 1/\theta^2$.

b) Siano X una variabile aleatoria tale che $\mathrm{E}(X) = 2$. Sapendo che X si distribuisce secondo una legge di probabilità di Poisson, rappresentare analiticamente la funzione di probabilità di X.

c) Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione X con $\mathrm{E}(X) = 3$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ incognita. Verificare che $T_n = \sum_{i=1}^n (X_i - 3)^2/n$ è uno stimatore non distorto di σ^2.

ESERCIZIO 1. – Probabilità (peso: 35%)

Supponiamo che il tempo X (in ore) di funzionamento ininterrotto di un computer, prima che sia necessario riavviarlo a causa di un crash di sistema, sia una variabile aleatoria esponenziale negativa con la seguente funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di λ e $\mathrm{E}(X)$.

b) Si supponga di avere un sistema in cui ci siano 5 computer che funzionano indipendentemente l'uno dall'altro. Calcolare la probabilità che almeno due di essi funzionino per più di 100 ore.

c) Si supponga che nel sistema siano operativi 225 computer (che funzionano in modo indipendente l'uno dall'altro). Calcolare la probabilità che almeno 90 di questi funzionino per più di 100 ore.

ESERCIZIO 2. – Inferenza (peso: 35%)

Sia $X_1, \ldots, X_{10}$ un campione di misurazioni della concentrazione di mercurio (espressa in una opportuna unità di misura) rilevata nei pesci di un lago. Si ipotizza che tali misurazioni siano distribuite secondo una legge normale con media μ (incognita) e scarto quadratico medio $\sigma = 0.8$. I dati osservati sono i seguenti

11.2   12.4   10.8   11.6   12.5   10.1   11   12.2   12.4   10.6

a) Determinare un intervallo di confidenza per μ al 95%.

b) Determinare una regione di rifiuto di un test di dimensione $\alpha = 0.01$ per verificare

$$H_0 : \mu = 11 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = 13$$

c) Sulla base del campione osservato, decidere se accettare o rifiutare H_0.