Facoltà di ECONOMIA – Università di Pavia

12 Settembre 2006

Prova scritta di STATISTICA (ISTITUZIONI)

e di STATISTICA 1 (ELEMENTI DI PROBABILITÀ E DI INFERENZA)

Riportare sul foglio nel quale sono svolti gli esercizi:

1. nome e cognome
2. numero di matricola

DOMANDE DI "TEORIA". (10 punti)

a) Descrivere la funzione di probabilità di una legge di Poisson di parametro $\lambda = 2$.

b) Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione X con $E(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < +\infty$ (entrambe incognite). Si proponga uno stimatore non distorto per σ^2.

c) Se $X_1, \ldots, X_5$ sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite secondo la legge normale di parametri $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 0.6$, qual è la distribuzione di probabilità della media campionaria $\bar{X}_5 = \sum_{i=1}^{5} X_i/5$?

ESERCIZIO 1. – PROBABILITÀ (10 punti)

Sia X una variabile aleatoria distribuita secondo la legge di probabilità normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 9$

a) Qual è la legge di probabilità della variabile aleatoria $Y = \frac{X-1}{3}$?

b) Calcolare $P(X \leq 1.9)$.

c) Se $X_1, \ldots, X_{25}$ sono variabili indipendenti e identicamente distribuite con la stessa legge di X, calcolare

$$P\left(\bar{X}_{25} \leq 1.9\right),$$

ove $\bar{X}_{25} = \sum_{i=1}^{25} X_i$ è la media campionaria di $X_1, \ldots, X_{25}$.

ESERCIZIO 2. – INFERENZA (10 punti)

Sia X_1, X_2, X_3, X_4 un campione casuale estratto da una popolazione X distribuita secondo una legge bernoulliana di parametro $p \in [0, 1]$ incognito. Per verificare l'ipotesi $H_0 : p = 0.4$ vs $H_1 : p = 0.7$ è stata proposta la seguente regione di rifiuto

$$\mathcal{R} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_{i=1}^{4} x_i > 2\right\}$$

a) Determinare la probabilità di errore di prima specie associata al test di cui sopra.

b) Se si è osservato il campione $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, l'ipotesi H_0 è rifiutata o accettata?

c) Sia $X_1, \ldots, X_{100}$ un campione casuale con la stessa legge di X. Utilizzando una opportuna approssiomazione asintotica, determinare la regione di rifiuto di un test di livello $\alpha = 0.05$ per verificare $H_0 : p = 0.4$ vs $H_1 : p = 0.7$.