Facoltà di ECONOMIA – Università di Pavia

17 Febbraio 2004

Prova scritta di STATISTICA (ISTITUZIONI), di STATISTICA 1
e di STATISTICA 1 (ELEMENTI DI PROBABILITÀ E DI INFERENZA)

Memoranda

- **Riportare sul foglio nome, cognome e numero di matricola**
- Gli studenti immatricolati nell'a.a. 1999-2000 o negli anni accademici precedenti devono rispondere alle Domande di "Teoria", svolgere l'Esercizio 1 e **uno** a scelta tra gli Esercizi 2 e 3.
- Gli studenti immatricolati nell'a.a. 2000-2001 devono rispondere alle Domande di "Teoria" e svolgere **entrambi** gli Esercizi 2 e 3.

DOMANDE DI "TEORIA". (9 punti)

a) Sia X una variabile aleatoria distribuita secondo una legge normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Si definisca una nuova variabile aleatoria, Y, nel modo seguente $Y = (X - 1)/2$. Qual è la distribuzione di probabilità di Y?

b) Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione X la cui legge di probabilità P_θ dipende da un parametro incognito $\theta \in \mathbb{R}$. Si dia la definizione di intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per θ.

c) Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione $X \sim N(1, \sigma^2)$, dove σ^2 è incognita. Proporre uno stimatore non distorto per σ^2.

ESERCIZIO 1. – STATISTICA DESCRITTIVA (8 punti)

Siano X e Y due variabili statistiche (relative a due caratteri quantitativi distinti) la cui distribuzione di frequenza congiunta è riassunta nella seguente tabella a doppia entrata

X / Y	0	1	2
2	0.1	0.1	0.05
3	0.2	0	0.15
5	0.15	0.25	0

a) Calcolare $M(X)$ e $M(Y)$.

b) Calcolare $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

c) Determinare il valore numerico del coefficiente di correlazione lineare $\rho(X, Y)$ tra le variabili X e Y.

ESERCIZIO 2. – Probabilità (8 punti)
Siano X una variabile aleatoria distribuita secondo la legge di Bernoulli di parametro $p = 0.3$.

a) Determinare $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

b) Siano $X_1, \dots, X_{16}$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite la cui legge di probabilità coincide con quella di X. Se $Y = X_1 + \cdots + X_{16}$, qual è la distribuzione di probabilità di Y?

c) Calcolare $P(Y > 1)$, essendo Y la variabile aleatoria definita nel precedente punto b).

ESERCIZIO 3. – Inferenza (8 punti)
Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione X distribuita secondo la legge di Poisson di parametro $\theta > 0$.

a) Si ricavi lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

b) Se $n = 7$ e si osserva un campione le cui realizzazioni sono

$$x_1 = x_2 = 3, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = 6, \qquad x_5 = 4, \qquad x_6 = 0, \qquad x_7 = 1,$$

si calcoli la stima di massima verosimiglianza di θ.

c) Sfruttando la proprietà di invarianza degli stimatori di massima verosimiglianza, si determini la stima di massima verosimiglianza di $h(\theta) = \theta(1 + \theta)$.