

**CdL Specialistica in Sociologia, Esame di Algebra Matriciale
Appello del 17/12/2004 - Versione B**

Esercizio 1. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Stabilire i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali \mathcal{B} é una base di \mathbb{R}^4 ;
- per $k = 1$, trovare il vettore delle coordinate nella base \mathcal{B} di $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Quali sono dominio e codominio dell'applicazione lineare associata? Si scriva esplicitamente tale funzione.
- Si determinino dimensione, equazioni Cartesiane e una base per $\ker(A)$;
- si determinino $\text{rango}(A)$, equazioni Cartesiane e una base per

$$\text{span}\{A^1, A^2, A^3, A^4\}.$$

- Si studi il sistema lineare $AX = b$, al variare di $b \in \mathbb{R}^4$, cioè:
 - i): si trovi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo (cioé con $b = 0$);
 - ii): si trovino equazioni Cartesiane per lo spazio dei $b \in \mathbb{R}^3$ per i quali il sistema é risolubile;
 - iii): per ogni $b \in \mathbb{R}^3$ soddisfacente tali equazioni determinare lo spazio delle soluzioni, esibendolo come traslato del nucleo $\ker(A)$.

Esercizio 3. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- trovare gli autovalori di A .
- stabilire se A é diagonalizzabile e nel caso trovare una base di \mathbb{R}^3 composta da autovettori di A .
- trovare, se esiste, una matrice B 3×3 invertibile tale $B^{-1}AB$ é diagonale;
- se B é come sopra, verificare esplicitamente che $B^{-1}AB$ é diagonale.