

**CdL Specialistica in Sociologia, Esame di Algebra Matriciale  
Appello del 17/12/2004 - Versione B**

**Esercizio 1.** Sia  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

- Stabilire i valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  per i quali  $\mathcal{B}$  é una base di  $\mathbb{R}^4$ ;
- per  $k = 1$ , trovare il vettore delle coordinate nella base  $\mathcal{B}$  di  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Esercizio 2.** Sia  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

- Quali sono dominio e codominio dell'applicazione lineare associata? Si scriva esplicitamente tale funzione.
- Si determinino dimensione, equazioni Cartesiane e una base per  $\ker(A)$ ;
- si determinino  $\text{rango}(A)$ , equazioni Cartesiane e una base per

$$\text{span}\{A^1, A^2, A^3, A^4\}.$$

- Si studi il sistema lineare  $AX = b$ , al variare di  $b \in \mathbb{R}^4$ , cioè:
  - i): si trovi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo (cioé con  $b = 0$ );
  - ii): si trovino equazioni Cartesiane per lo spazio dei  $b \in \mathbb{R}^3$  per i quali il sistema é risolubile;
  - iii): per ogni  $b \in \mathbb{R}^3$  soddisfacente tali equazioni determinare lo spazio delle soluzioni, esibendolo come traslato del nucleo  $\ker(A)$ .

**Esercizio 3.** Sia  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

- trovare gli autovalori di  $A$ .
- stabilire se  $A$  é diagonalizzabile e nel caso trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  composta da autovettori di  $A$ .
- trovare, se esiste, una matrice  $B$   $3 \times 3$  invertibile tale  $B^{-1}AB$  é diagonale;
- se  $B$  é come sopra, verificare esplicitamente che  $B^{-1}AB$  é diagonale.