CdL Specialistica in Sociologia, Esame di Algebra Matriciale
Appello del 17/12/2004 - Versione A - Soluzioni

Esercizio 1. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Stabilire i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{B}$ é una base di $\mathbb{R}^4$;
- per $k = 1$, trovare il vettore delle coordinate nella base $\mathcal{B}$ di $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Partendo dalla matrice estesa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & k & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

si perviene mediante operazioni per righe alla matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{k}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\frac{3}{2}k & -\frac{5}{2} \end{array}\right]. \tag{1}$$

Dalla (1) deduciamo ora:

- Il primo blocco 4×4 ha quattro gradini, e quindi la matrice avente per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ ha rango quattro, se e solo se $-1 - \frac{3}{2}k \neq 0$, ovvero se e solo se $k \neq -\frac{2}{3}$. Quindi $\mathcal{B}$ è una base se e solo se $k \neq -\frac{2}{3}$. In particolare, lo è per $k = 1$.
- Per $k = 1$, la matrice (1) diviene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right]. \tag{2}$$

Dalla (2), mediante operazioni elementari per righe perveniamo alla

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]. \tag{3}$$

La (3), a sua volta, ci dice che la colonna delle coordinate di $v =: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

nella base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In effetti, come verifica, si ha:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 0 \\ 0 + 1 + 0 + 1 \\ 2 + 0 + 1 + 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

- Quali sono dominio e codominio dell'applicazione lineare associata? Si scriva esplicitamente tale funzione.
- Si determinino dimensione, equazioni Cartesiane e una base per $\ker(A)$;
- si determinino rango(A), equazioni Cartesiane e una base per

$$\mathrm{span}\{A^1, A^2, A^3, A^4\}.$$

- Si studi il sistema lineare $AX = b$, al variare di $b \in \mathbb{R}^3$, cioé:

  i): si trovi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo (cioé con $b = 0$);

  ii): si trovino equazioni Cartesiane per lo spazio dei $b \in \mathbb{R}^3$ per i quali il sistema é risolubile;

iii): per ogni $b \in \mathbb{R}^3$ soddisfacente tali equazioni determinare lo spazio delle soluzioni, esibendolo come traslato del nucleo $\ker(A)$.

Soluzione.

- Dominio: $\mathbb{R}^4$. Codominio: $\mathbb{R}^3$. L'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ è data da

$$L_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z + t \\ y + 2z + 2t \\ x + z - t \end{pmatrix}.$$

Per rispondere alle altre domande, scriviamo la matrice estesa $A' = [A|b]$, ove $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Si ha

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & b_3 \end{array}\right].$$

Mediante operazioni per righe, perveniamo alla

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1+b_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & b_1 + b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{b_3-b_1}{2} \end{array}\right]. \tag{4}$$

Dalla (4), deduciamo ora:

- $\text{rango}(A) = 3$. Pertanto,

$$\dim \operatorname{Im}(L_A) = \dim\left(\text{span}\{A^1, A^2, A^3, A^4\}\right) = 3,$$

  e quindi L_A è suriettiva: $\operatorname{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$. Detto altrimenti, il sistema $AX = b$ è risolubile (compatibile) per ogni $b \in \mathbb{R}^3$.

- Equazioni Cartesiane per $\ker(A)$ sono

$$\ker(A)\,:\, x = 0,\; y + 4t = 0,\; z - t = 0.$$

In termini parametrici, vedendo t come parametro indipendente (essendo la variabile che non corrisponde a nessun gradino):

$$\begin{aligned}
\ker(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

- Dato $b \in \mathbb{R}^3$, lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = b$ è

$$\begin{aligned}
S_b &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_1+b_3}{2} \\ -4t + b_1 + b_2 - b_3 \\ t + \frac{b_3-b_1}{2} \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \ker(A) + \begin{pmatrix} \frac{b_1+b_3}{2} \\ b_1 + b_2 - b_3 \\ \frac{b_3-b_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

- trovare gli autovalori di A.
- stabilire se A é diagonalizzabile e nel caso trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A.
- trovare, se esiste, una matrice B 3×3 invertibile tale $B^{-1}AB$ é diagonale;
- se B é come sopra, verificare esplicitamente che $B^{-1}AB$ é diagonale.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(X) = \det(X \cdot I_3 - A) = \det \left(\begin{bmatrix} X-1 & -1 & -2 \\ -1 & X-1 & -2 \\ -2 & -2 & X-4 \end{bmatrix} \right).$$

Consideriamo lo schieramento

$$\begin{array}{ccccc} X-1 & -1 & -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & -2 & -1 & X-1 \\ -2 & -2 & X-4 & -2 & -2 \end{array}$$

e usiamo la solita regoletta (*determinante di A = somma dei prodotti lungo le diagonali meno somma dei prodotti lungo le antidiagonali*), **valida solo per matrici** 3×3. Otteniamo

$$\begin{aligned} p_A(X) &= (X-1)^2(X-4) - 4 - 4 - 4(X-1) - 4(X-1) - (X-4) \\ &= X^3 - 6X^2 = X^2(X-6). \end{aligned} \tag{7}$$

Deduciamo dalla (7) che la matrice A ha due autovalori, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 6$. Calcoliamo ora i corrispondenti autospazi. L'autospazio relativo all'autovalore λ_1 è

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \ker(A) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + 2z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che tutte le righe di A sono multiple della prima.

Veniamo al secondo autospazio. Si ha

$$6I_3 - A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Essendo λ_2 un autovalore di A, sappiamo a priori che questa matrice non è invertibile, quindi non può avere rango 3. D'altra parte le ultime due righe sono certamente linearmente indipendenti (perchè?) e pertanto la prima è certamente una loro combinazione lineare (verificare). Nella determinazione di V_{λ_2}, possiamo pertanto limitarci a prendere in considerazione solo le equazioni

Cartesiane associate alle ultime due righe di $6I_3 - A$. Il secondo autospazio è pertanto

$$V_{\lambda_2} \;=\; \ker(6I_3 - A) = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right). \tag{9}$$

Mediante operazioni per righe, quest'ultima matrice diviene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

In definitiva,

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, x - \frac{1}{2}z = 0,\, y - \frac{1}{2}z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \,:\, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Poichè sappiamo che la riunione di basi di autospazi relativi ad autovalori diversi è un'insieme di vettori linearmente indipendenti, la terna ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{12}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A.

Sia ora

$$B =: \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

la matrice avente per colonne i vettori di $\mathcal{B}$. Poichè le colonne di B sono una base di $\mathbb{R}^3$, la matrice B è invertibile. Per calcolare B^{-1}, scriviamo la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Operando per righe, perveniamo infine alla

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Pertanto,

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$B^{-1}\,A\,B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(verificare).