CdL Specialistica in Sociologia, Esame di Algebra Matriciale
Appello del 14/2/2005 - Versione A

Esercizio 1. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} \right\}$.

- Stabilire, se esistono, i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{B}$ é una base di $\mathbb{R}^4$;
- per $k = 0$, stabilire se il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio generato dagli elementi di $\mathcal{B}$.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Quali sono dominio e codominio dell'applicazione lineare associata? Si scriva esplicitamente tale funzione.
- Si determinino dimensione, equazioni Cartesiane e una base per $\ker(A)$;
- si determinino rango(A), equazioni Cartesiane e una base per lo spazio immagine.
- Si studi il sistema lineare $AX = b$, al variare di $b \in \mathbb{R}^4$, cioé:

  i): si trovi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo (cioé con $b = 0$);

  ii): si trovino equazioni Cartesiane per lo spazio dei $b \in \mathbb{R}^4$ per i quali il sistema é risolubile;

  iii): per ogni $b \in \mathbb{R}^4$ soddisfacente tali equazioni determinare lo spazio delle soluzioni, esibendolo come traslato del nucleo $\ker(A)$.

Esercizio 3. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- trovare gli autovalori di A.
- stabilire se A é diagonalizzabile e nel caso trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A.
- trovare, se esiste, una matrice B 3×3 invertibile tale $B^{-1}AB$ é diagonale;
- se B é come sopra, verificare esplicitamente che $B^{-1}AB$ é diagonale.