Esame di Inferenza Statistica / Inferenza Statistica Classica / Statistica II mod. B 31.01.08

COGNOME _________________ **NOME** __________________ **Matr.** _________

Docente: Prof. Zenga Prof.Zini

Attenzione: *lo studente deve fornire i diversi passaggi dei calcoli eseguiti e i commenti richiesti. Il presente foglio deve essere compilato e riconsegnato. E' vietato l'uso di calcolatrici programmabili o con funzione di agenda elettronica.*

1) Si consideri il campione casuale ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) proveniente dalla variabile casuale X avente la seguente funzione di densità:

$$f(x;\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}(\ln x-\gamma)^2} \qquad x>0, \gamma \in \Re.$$

a) Si stabilisca se la famiglia di distribuzioni con funzioni di densità $f(x;\gamma)$ per $\gamma \in \Re$ è una famiglia esponenziale.

b) Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza di γ e se ne elenchino (giustificando la risposta) le proprietà statistiche.

c) Supponendo che nel campione siano stati osservati i valori $x_1 = 3{,}67$, $x_2 = 0{,}62$; $x_3 = 6{,}3$; $x_4 = 2{,}34$, si calcoli un intervallo di confidenza per γ con livello di confidenza pari al 98% (aiuto: si ricordi che se X è una v.c. lognormale allora $Y=log(X)$ è una v.c. normale).

d) Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza per $\tau(\gamma) = e^{\gamma}$.

2) Si è verificato un problema su una linea di produzione dell'azienda OG. Per individuare l'origine del guasto il tecnico consulta la carta di controllo: nella giornata odierna la variabile X = "*numero di pezzi prodotti da un macchinario prima che esso si arresti*" ha avuto la seguente distribuzione:

X	0	1	2	3	4	5 o più	Totale
frequenza	870	415	196	122	68	46	1717

Si verifichi l'ipotesi che la variabile casuale $Y=X+1$ abbia distribuzione geometrica (si fissi l'ampiezza del test al 5%), assumendo che la media delle osservazioni della variabile X nell'ultima classe sia pari a 7.

NB: La funzione di probabilità di una variabile casuale geometrica è data da $p(y) = (1-p)^{y-1}p$ per y = 1, 2, 3, ….

3) In una giornata d'estate è stata rilevata la temperatura Y (in gradi Celsius) alle ore 12 in 6 località montane situate a diversa altezza sul livello del mare X (in metri).

X	653	1132	956	795	1562	803
Y	31,3	26,4	27,6	29,4	22,1	28,5

Volendo applicare il modello lineare $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$:

a) Si calcoli l'intervallo di confidenza al 98% per la temperatura media $\mu(x)$ in corrispondenza di $x = 1000$.

b) Si verifichi l'ipotesi che il coefficiente angolare della retta sia non maggiore di zero, volendo commettere l'errore di prima specie con probabilità del 5%.

c) Si calcoli un intervallo di confidenza al 99% per la varianza dei residui.