

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Prof. Cazzaro

Prof. Zenga

Prof. Zini

- 1) Si consideri un campione casuale di ampiezza n da una variabile casuale X avente funzione di densità:

$$f(x; \theta) = 4\theta x^3 e^{-\theta x^4} \quad \text{per } x > 0; \theta > 0$$

- Si ricavi lo stimatore T per la funzione parametrica $1/\theta$ con il metodo della massima verosimiglianza.
 - Sapendo che la variabile casuale $Y = X^4$ segue una distribuzione esponenziale di parametro θ , si valutino la correttezza e la consistenza quadratica dello stimatore T .
 - Si verifichi se la varianza dello stimatore T raggiunge il limite inferiore di Rao-Cramèr.
 - Si fattorizzi opportunamente la quantità: $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_i; \theta)$ e, in considerazione della funzione parametrica $\tau^*(\theta)$ individuata in questa fattorizzazione, si giustifichi il risultato del punto c).
- 2) Un campione casuale di elettrodomestici prodotti da una nota azienda è stato classificato in base al carattere $X = \text{durata di funzionamento ininterrotto}$ (in anni):

Classi di X	0–2	2–3	3–5	5 e oltre
Frequenze	105	160	141	120

- Sapendo che il totale della classe “5 e oltre” è pari a 210, si verifichi ($\alpha = 0,05$) se la distribuzione di X può essere adeguatamente descritta dal modello esponenziale:

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x} \quad \text{per } x > 0 \quad \theta > 0$$
 - Si costruisca un intervallo di confidenza asintotico, al livello del 98%, per la proporzione di elettrodomestici con durata di funzionamento ininterrotto inferiore ai tre anni.
- 3) I ragazzi iscritti ad atletica leggera presso la Polisportiva del Comune ABC sono suddivisi in tre gruppi, ciascuno guidato da un allenatore diverso. Per mettere a confronto i risultati sportivi dei tre gruppi, si estrae da ciascuno di essi un campione casuale di cinque ragazzi, che vengono cronometrati su un percorso prestabilito. I tempi di percorrenza realizzati dai ragazzi (in minuti) sono riportati in tabella:

Gruppo 1	18,6	16,9	17,3	18,5	18,3
Gruppo 2	17,1	16,3	15,8	16,4	16,0
Gruppo 3	15,9	17,2	16,4	15,4	16,8

Devianza totale = 13,816

Dopo avere specificato (per ciascuno dei punti successivi) le necessarie ipotesi,

- Si verifichi se le varianze dei tempi di percorrenza nei gruppi 1 e 3 possano ritenersi omogenee, al livello di significatività del 5%.
- Si stabilisca se il tempo medio di percorrenza possa ritenersi uguale per i tre gruppi, al livello di significatività del 5%.
- Si costruisca un intervallo di confidenza al 98% per la differenza fra i tempi medi di percorrenza relativi ai gruppi 1 e 3.