Esame di Inferenza Statistica / Inferenza Statistica Classica / Statistica II mod. B 18.02.08

COGNOME ________________ **NOME** _________________ **Matr.** _________

Docente: Prof. Zenga Prof.Zini

Attenzione: *lo studente deve fornire i diversi passaggi dei calcoli eseguiti e i commenti richiesti. Il presente foglio deve essere compilato e riconsegnato. E' vietato l'uso di calcolatrici programmabili o con funzione di agenda elettronica.*

1) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale semplice proveniente da una variabile casuale X avente la seguente funzione di probabilità:

$$p(x;\theta) = (1-\theta)^{x-1}\theta \qquad 0 < \theta < 1, \quad x = 1,2,3,\ldots..$$

a) Si trovi uno stimatore per il parametro θ usando sia il metodo dei momenti, sia il metodo della massima verosimiglianza.
b) Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza per $\tau(\theta) = 1/\theta$.
c) Si dimostri che la famiglia di distribuzioni considerata è una famiglia esponenziale.
d) Esiste una funzione di θ che ammette uno stimatore corretto a varianza uniformemente minima? In caso affermativo si determini tale funzione di θ e si fornisca il limite inferiore di Rao-Cramèr.

2) E' stato rilevato il voto (in trentesimi) conseguito all'esame di matematica di 1000 studenti della facoltà di Economia di una Università. I risultati delle rilevazioni sono riportati nella seguente tabella:

Scuola di provenienza	no. studenti	voto medio	varianza
Liceo Scientifico	366	25,1	4,3
Liceo Classico	255	24,9	4,25
Istituto Tecnico Commerciale	379	24,6	4,33

Si assuma che i voti conseguiti da studenti provenienti dallo stesso tipo di scuola siano realizzazioni di v.c. normali i.i.d. e che la varianza sia uguale per i tre tipi di scuola considerati.

a) Si verifichi se i voti medi degli studenti provenienti dai tre tipi di scuola possano ritenersi uguali (si fissi l'ampiezza del test al livello $\alpha = 0{,}05$).
b) Si verifichi l'ipotesi nulla che il voto medio degli studenti provenienti da licei scientifici *non* sia inferiore al voto medio degli studenti provenienti da istituti tecnici commerciali (si fissi l'ampiezza del test al livello $\alpha = 0{,}01$).
a) Si calcoli un intervallo di confidenza al 99% per la varianza del voto degli studenti provenienti da licei scientifici (si usi l'approssimazione $\chi^2_{(n;\alpha)} \cong 0{,}5\left(z_\alpha + \sqrt{2n-1}\right)^2$).

3) Per $n = 8$ domeniche è stato rilevato il numero di clienti X di un supermercato e l'incasso Y (in Euro). Dalle rilevazioni è emerso che

$$\overline{X} = 642{,}25; \quad \overline{Y} = 22742; \quad Var(X) = 3675{,}438; \quad Var(Y) = 4412326; \quad Cov(X,Y) = 121135{,}3.$$

Volendo applicare il modello lineare $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$:

b) Si calcoli l'intervallo di confidenza al 99% per l'incasso medio $\mu(x)$ in corrispondenza di $x = 600$.
c) Si verifichi H_0: $\beta_1 \geq 40$ contro H_1: $\beta_1 < 40$, volendo commettere l'errore di prima specie con probabilità del 5%.
d) Si calcoli un intervallo di confidenza al 95% per la varianza dei residui.