Università degli Studi di Milano-Bicocca – Facoltà di Economia – A.A. 2006/07

Corso di Inferenza Statistica

Esame del 14 giugno 2007

1.Sia $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un campione casuale semplice estratto da una distribuzione con funzione di densità del tipo

$$f(x;k) = \frac{1}{k(1+x)^{(1/k)+1}},$$

dove $x \geq 0$, e $k > 0$ è un parametro ignoto.
a) Stabilire se la famiglia di distribuzioni con funzione di densità $f(x;k)$ è una famiglia esponenziale.
b) Determinare uno stimatore di k applicando sia il metodo dei momenti, che quello di massima verosimiglianza.
c) Tenendo presente che la funzione di densità delle variabili casuali $Y_i = \ln(1 + X_i)$ è data da

$$g(y) = \frac{1}{k} e^{-y/k}$$

si stabilisca se lo stimatore di massima verosimiglianza trovato al punto b) è corretto.
d) Si calcoli la varianza dello stimatore di massima verosimiglianza, e si verifichi se tale varianza raggiunge il limite inferiore di Rao Cramèr.

2.In vista di una competizione automobili stica, la scuderia F prova tre tipi di pneumatico. I tempi di percorrenza X (rilevati in secondi) di un giro del tracciato sono riportati nella seguente tabella:

pneumatico 1	pneumatico 2	pneumatico 3
53.241	53.160	53.498
53.651	52.978	52.962
53.003	53093	53.251
53.234		53.112
52.995		

Si supponga che i tempi di percorrenza rilevati siano osservazioni di variabili casuali normali indipendenti, con varianza comune σ^2 (ignota), e che μ_1, μ_2, μ_3 (ignoti) siano rispettivamente i valori attesi delle variabili casuali normali riferite al pneumatico del tipo 1,2,3.
Fissando il livello di significatività al 5%, si stabilisca se l'ipotesi nulla $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ debba essere rifiutata a favore dell'ipotesi alternativa $H_1 : \sum_{i,j=1}^{3} \left|\mu_i - \mu_j\right| > 0$.

3.Sono stati rilevati l'altezza X (in cm) e il peso Y (in kg) di 15 neonati. Dalle rilevazioni risulta che

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 595.2, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i = 59.619, \quad \sum_{i=1}^{15} x_i y_i = 2368.883, \quad \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 23709.02.$$

Si supponga che $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$, dove le variabili casuali E_i sono indipendenti, e, in base all'esperienza passata, si può ritenere che la loro distribuzioni sia normale con media nulla e varianza $\sigma^2 = 0.0144$.
a) Si calcolino le stime di massima verosimiglianza per i paramentri β_0 e β_1.
b) Si verifichi l'ipotesi $H_0 : \beta_1 = 0$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \beta_1 > 0$, al livello di significatività $\alpha = 0.05$.
c) Si costruisca l'intervallo di confidenza per il peso medio di un neonato di altezza $x = 42cm$ con livello di confidenza pari al 99%.