

# Esame di Probabilità, distribuzioni e regressione multipla / Statistica II A

## Prova parziale di Probabilità

14.12.07

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_

**Docente:**     Prof.ssa Cazzaro    Prof.ssa Pollastri    Prof.ssa Greselin    Prof.ssa Zenga

**Attenzione:** lo studente deve fornire i diversi passaggi dei calcoli eseguiti e i commenti richiesti. Il presente foglio deve essere compilato e riconsegnato. E' vietato l'uso di calcolatrici programmabili o con funzione di agenda elettronica. Approssimare i calcoli alla terza cifra decimale.

### Domanda di teoria (da svolgere sul primo foglio quadrettato e riconsegnare entro 20 minuti):

La v.c. di Pareto: si indichi la funzione di densità, si ricavino la funzione di ripartizione e l'espressione del generico quantile di ordine  $p$ , (si determini l'espressione dei momenti dall'origine di ordine  $r$  e se ne discuta l'esistenza.)

---

1) Sia  $X$  una v.c. la cui funzione di ripartizione è la seguente:

$$F(x) = \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{-1} \quad \text{per } x > 0, \quad \text{con } \lambda \text{ costante reale positiva.}$$

- Si determini la funzione di densità di  $X$ .
- Si verifichino le caratteristiche della funzione di ripartizione.
- Si calcoli la mediana (in funzione della costante  $\lambda$ ) e il generico quantile di ordine  $p$
- Ponendo  $\lambda = 2$  e si calcolino  $P(3 < X < 7)$  e  $P(X < 7 \mid X > 3)$ .

2) In un aeroporto italiano, su 60 voli domenicali, si sa che il 75% dei voli viene operato dal vettore ABK. Si sa inoltre che, nella giornata di domenica, il 4% dei voli operati da ABK risulta essere in ritardo, mentre la percentuale dei voli in ritardo operati da altri vettori è dell'8%.

- Qual è la probabilità che un volo sia in ritardo nella giornata di domenica?
- Qual è la probabilità che se il volo è in ritardo sia operato da ABK?
- Un addetto del controllo voli decide di analizzare la situazione nella giornata di domenica. Estrae senza riposizione 15 voli dei 60 previsti. Qual è la probabilità che 5 siano in ritardo? Si calcoli inoltre media e varianza della v.c. che conta i voli in ritardo sui 15 estratti senza riposizione.

3) Il consumo mensile  $Y$  per beni di prima necessità delle famiglie irlandesi composte da 4 persone si distribuisce come una legge lognormale. Si sa che l'80% delle famiglie consuma mensilmente al più 1100 €, mentre il consumo medio è pari a 800 €.

- Si illustri e si dimostri la relazione che esiste tra la v.c. normale e la v.c. lognormale.
- Posto  $\delta = 0.576$ , si calcoli la varianza della v.c.  $Y$ .
- Posto  $\delta = 0.576$ , si calcoli  $Pr(500 < Y \leq 800)$ .

# Esame di Probabilità, distribuzioni e regressione multipla / Statistica II A

## Prova parziale di Probabilità

14.12.07

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_

Docente: Prof.ssa Cazzaro Prof.ssa Greselin Prof.ssa Pollastri Prof.ssa Zenga

**Attenzione:** lo studente deve fornire i diversi passaggi dei calcoli eseguiti e i commenti richiesti. Il presente foglio deve essere compilato e riconsegnato. E' vietato l'uso di calcolatrici programmabili o con funzione di agenda elettronica. Approssimare i calcoli alla terza cifra decimale.

### Domanda di teoria (da svolgere sul primo foglio quadrettato e riconsegnare entro 20 minuti):

La funzione generatrice dei momenti: si dia la definizione, se ne evidenzi il legame con i momenti e se ne enuncino i principali teoremi (con dimostrazione).

---

- 1) Due amici, A e B, si sfidano a minigolf su un terreno formato da 6 buche. In ciascuna buca, la probabilità che A giochi meglio di B è 0.6.
- Si calcoli la probabilità che A giochi meglio di B in 5 delle 6 buche.
  - Si forniscano il valore atteso e la varianza del numero di buche in cui A gioca meglio di B.
  - Si valuti la probabilità che la prima buca in cui B gioca meglio di A sia la quarta.
  - Si determini la probabilità che la seconda buca in cui B gioca meglio di A sia la sesta.

- 2) Il tempo di funzionamento ininterrotto di una fotocopiatrice per ufficio può essere descritto da una v.c. esponenziale  $X$  con mediana pari a 45 giorni.
- Si determini il parametro  $\theta$  della distribuzione.
  - Si calcolino il terzo quartile e la durata media di funzionamento ininterrotto della fotocopiatrice.
  - Si valuti la probabilità che la fotocopiatrice funzioni per più di 60 giorni ininterrottamente.
  - Sapendo che la fotocopiatrice sta già funzionando da 30 giorni, qual è la probabilità che non si guasti per altri 60 giorni?
  - Dopo aver enunciato e dimostrato la proprietà di assenza di memoria della v.c. esponenziale, si confrontino i risultati del punto c) e d) e si fornisca un commento appropriato.

- 3) La funzione di densità di una v.c. continua  $X$  è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k} & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Si determini il valore del parametro  $k$  e si tracci il grafico di  $f(x)$ .
- Si calcolino  $E(X)$  e  $Var(X)$ .
- Si ricavi la funzione di ripartizione di  $X$ .
- Si determinino il primo ed il terzo quartile di  $X$ .

# Esame di Probabilità, distribuzioni e regressione multipla / Statistica II A

## Prova parziale di Probabilità

14.12.07

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_

Docente: Prof.ssa Cazzaro Prof.ssa Greselin Prof.ssa Pollastri Prof.ssa Zenga

**Attenzione:** lo studente deve fornire i diversi passaggi dei calcoli eseguiti e i commenti richiesti. Il presente foglio deve essere compilato e riconsegnato. E' vietato l'uso di calcolatrici programmabili o con funzione di agenda elettronica. Approssimare i calcoli alla terza cifra decimale.

### Domanda di teoria (da svolgere sul primo foglio quadrettato e riconsegnare entro 20 minuti):

La v.c. Gamma: si indichi la funzione di densità, si dimostri la relazione esistente con la v.c. Esponenziale, si ricavino (con il metodo ritenuto più opportuno) il valore atteso e la varianza.

- 1) Il 30% dei clienti di un'agenzia viaggi compra voli a lunga percorrenza. Il 70% dei clienti che compra voli a lunga percorrenza acquista anche il pernottamento, mentre soltanto il 25% dei clienti che non compra voli a lunga percorrenza acquista anche il pernottamento.
  - a) Sapendo che un cliente ha acquistato il pernottamento, qual è la probabilità che abbia comprato un volo a lunga percorrenza?
  - b) Effettuando delle estrazioni con riposizione dai clienti dell'agenzia viaggi, si calcoli la probabilità di estrarre un individuo che abbia acquistato il pernottamento solamente alla quinta estrazione.
  - c) Da un gruppo di 10 clienti se ne estraggono 3 in blocco. Si calcoli la probabilità che meno di due clienti acquistino voli a lunga percorrenza.
  
- 2) La variabile casuale  $X$  = "Numero di cellule malate presenti in un tessuto" ha distribuzione di Poisson con parametro  $\lambda = 1.9$ 
  - a) Si calcoli  $P(X > 3)$ .
  - b) Si calcoli la media e la varianza di  $X$  utilizzando la funzione generatrice dei momenti.
  - c) Sia  $Y$  la variabile casuale che conta il numero di cellule malate in un altro tessuto. Si assuma che  $X$  e  $Y$  abbiano la stessa distribuzione e che siano variabili casuali indipendenti. Si calcoli  $P(X+Y > 3)$  e  $P(X=2 | X+Y = 4)$ .
  
- 3) Sia  $X$  una v.c. discreta avente la seguente funzione di probabilità:

$x$	-1	1	2	3	5	8
$p(x)$	<del>0.1</del>	$k$	0.15	<del>0.1</del>	$3k$	<del>0.1</del>

- a) Determinare il valore della costante  $k$  che rende  $p(x)$  una funzione di probabilità per la v.c. discreta  $X$ .
- b) Ricavare la funzione di ripartizione di  $X$  e tracciarne il grafico.
- c) Dopo aver enunciato le proprietà della funzione di ripartizione di una v.c., si verifichi che esse valgono per la v.c. discreta  $X$ .
- d) Determinare il nono decile della v.c.  $X$ .
- e) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di  $X$  e, da questa, ricavare il valore atteso.

# Esame di Probabilità, distribuzioni e regressione multipla / Statistica II A

## Prova parziale di Probabilità

14.12.07

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_

Docente: Prof.ssa Cazzaro Prof.ssa Greselin Prof.ssa Pollastri Prof.ssa Zenga

**Attenzione:** lo studente deve fornire i diversi passaggi dei calcoli eseguiti e i commenti richiesti. Il presente foglio deve essere compilato e riconsegnato. E' vietato l'uso di calcolatrici programmabili o con funzione di agenda elettronica. Approssimare i calcoli alla terza cifra decimale

### Domanda di teoria (da svolgere sul primo foglio quadrettato e riconsegnare entro 20 minuti):

La variabile casuale log-normale: se ne definisca la funzione di densità, i momenti, i quantili e si dia dimostrazione del legame con la v.c. Normale.

---

1) Sia  $X$  una v.c. continua avente la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{0.5x}{k} & 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- a) Si determini il valore della costante  $k$  e si tracci il grafico di  $f(x)$ .
  - b) Si ricavino la funzione di ripartizione e la mediana di  $X$ .
  - c) Sapendo che  $X$  assume valori maggiori di 3.5, si calcoli la probabilità che la v.c. assuma valori minori di 4.5.
- 2) In un ufficio ci sono tre fotocopiatrici che richiedono l'intervento del tecnico per la sostituzione del toner: ciò avviene mediamente dopo un mese per le macchine A e B e dopo due mesi per la macchina C. Le tre fotocopiatrici lavorano in modo indipendente. Se il tempo di richiesta dell'intervento del tecnico per ogni macchina segue una legge esponenziale:
- a) Si calcoli la probabilità che nel prossimo mese nessuna macchina richieda l'intervento del tecnico;
  - b) Sapendo che la macchina C non ha richiesto l'intervento del tecnico nel primo mese, si determini la probabilità che fino al quarto mese non richieda la sostituzione del toner;
  - c) Si calcoli la probabilità che la macchina C nei prossimi 100 mesi per almeno 45 volte non richieda l'intervento del tecnico.
- 3) In una certa azienda, il reddito mensile (espresso in euro) degli operai segue la legge di Pareto di parametri  $x_0 = 500$  e  $\theta = 2$ , mentre il reddito degli impiegati segue una distribuzione Rettangolare continua di parametro  $a = 600$  e valore atteso pari a 1700 €. Si sa che l'85% dei dipendenti sono operai.
- a) Si valuti la probabilità che un impiegato abbia un reddito superiore a 1800 Euro.
  - b) Si determini la probabilità che un dipendente dell'azienda abbia un reddito superiore a 1800 Euro.
  - c) Estratto a caso un dipendente, e avendo verificato che il suo reddito è superiore a 1800 Euro, si determini la probabilità che egli sia un operaio.
  - d) Si calcoli la mediana del reddito per gli operai e, separatamente, la varianza del reddito per gli impiegati.
  - e) Si ricavi teoricamente la formula del momento di ordine  $r$  dall'origine per la v.c. di Pareto e si dica sotto quali condizioni esiste.