B

Cognome: .... Nome: .... Matricola:

Università degli Studi di Milano - Bicocca
Corso di laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed Economiche
Corso di laurea di primo livello in Statistica e Gestione delle Informazioni
Algebra Lineare - Giugno 2008

1. Sia data la seguente funzione
$$f(x,y) = \sqrt{e^{2\sqrt{\frac{x}{y}}} - 4e^{\sqrt{\frac{x}{y}}} + 3}.$$
   (a) Si determini analiticamente e si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza.
   (b) Si calcolino le derivate parziali prime di f.

2. In $\mathbb{R}^3$
   (a) dati i vettori $(0,1,1)$ $(k,0,1)$ $(1,k,0)$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i vettori sono l.i.
   (b) stabilire se l'insieme $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2x_3 \geq 0\}$ e' un sottospazio vettoriale.

3. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dall'espressione analitica
$$T(x_1,x_1,x_1,x_1) = (x_1 - x_2, x_2, x_1 + x_2 + x_3, 5x_4)$$
   (a) Si determini la matrice di rappresentazione di T rispetto alle basi canoniche.
   (b) Si trovino gli autovalori e i rispettivi autovettori, precisando di ogni autovalore la molteplicita' algebrica e geometrica.
   (c) Si stabilisca se la matrice e' diagonalizzabile e, in caso affermativo, si trovi una matrice diagonale simile.

4. Si discuta il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} x + y + \mu z &= 1 \\ x + \mu y + z &= \mu \\ \mu x + y + z &= \mu^2 \end{cases}$$
   come funzioni del parametro $\mu \in \mathbb{R}$, calcolando, quando e' possibile, l'insieme delle soluzioni.

5. Si studi il sistema
$$\begin{cases} 2x - 5y + 4hz - s + t &= 4 \\ x - 5y + z + s - ht &= -2 \\ x - 4y + 5z + 8hs - t &= 1 \end{cases}$$
   al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$. Nel calcolo delle soluzioni non e' necessario sviluppare i determinanti che sono funzioni di variabili incognite.

6. Sia $A \in M_n$ tale che
$$A^m = 0$$
   pêr qualche $m \in \mathbb{N}$, dove 0 e' la matrice in M_n le cui entrate sono tutte uguali a zero.
   (a) Si dimostri che se B e' simile ad A allora
$$B^m = 0.$$
   (b) Si dimostri che $0 \in sp(A)$.
   (c) Utilizzando b) ed il fatto che se $\lambda \in sp(A)$ allora $\lambda^\ell \in sp(A^\ell)$ per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, si dimostri che 0 e' l'unico autovalore di A.