A

Cognome: .... Nome: .... Matricola:

Università degli Studi di Milano - Bicocca
Corso di laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed Economiche
Corso di laurea di primo livello in Statistica e Gestione delle Informazioni
Algebra Lineare - 16 Luglio 2008

1. Sia data la seguente funzione
$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2-y^2}{y-x^2}\right).$$
   (a) Si determini analiticamente e si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza.
   (b) Si calcolino le derivate parziali prime di f.

2. In $\mathbb{R}^3$
   (a) dati i vettori $(k,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,k,0)$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i vettori sono l.i.
   (b) stabilire se l'insieme $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_1x_3 = 0\}$ e' un sottospazio vettoriale.

3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dall'espressione analitica
$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3).$$
   (a) Si determini la matrice di rappresentazione di T rispetto alle basi canoniche.
   (b) Si trovino gli autovalori e i rispettivi autovettori, precisando di ogni autovalore la molteplicita' algebrica e geometrica.
   (c) Utilizzando quanto trovato si stabilisca se la matrice e' diagonabilizzabile ed in caso affermativo si trovi una matrice invertibile Y tale che $Y^{-1}TY$ e' una matrice diagonale.

4. Si studi il sistema
$$\begin{cases} 2x - 5y + 6\lambda z - s + t &= 4 \\ \lambda x - 5y + 3z + s - t &= -2 \\ x - 2y + 5z + 8s - \lambda t &= 1 \end{cases}$$
al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Nel calcolo delle soluzioni non e' necessario sviluppare i determinanti che sono funzioni di variabili incognite, tuttavia vanno indicate esplicitamente le variabili usate come parametri.

5. Data la forma quadratica
$$Q_\gamma(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \gamma x_1x_2 + \gamma x_1x_3 + (1-\gamma)x_2x_3,$$
si studi la segnatura al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$.

6. Sia $A \in M_n$ una matrice con $\ker A = 0$. Si assuma che esiste un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ tale che $AW \subset W$, cioe' per ogni $w \in W$ si ha $Aw \in W$.
   (a) Si dimostri che $AW = W$, cioe' $\forall w \in W$ esiste $w' \in W$ tale che $Aw' = w$.
   (b) Si dimostri che A^{-1} esiste e $A^{-1}W = W$, cioe' per ogni $w \in W$ si ha $A^{-1}w \in W$.
   (c) Sia $\mathbf{P} = \left\{\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell t^\ell \,|\, a_\ell \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{N}\right\}$ ovvero lo spazio dei polinomi di grado arbitrario a coefficienti reali. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri il sottospazio $\mathbf{P}_n \subset \mathbf{P}$ cosi' definito
$$\mathbf{P}_n = \left\{\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell t^{\ell+n} \,|\, a_\ell \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{N}\right\}$$
e la trasformazione $L : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ data da $Lp(t) = tp(t)\ \forall p(t) \in \mathbf{P}$. Si dimostri che entrambe
$$\ker L = 0 \quad \text{e} \quad L^{-1} \text{non esiste}$$
sono vere. Infine, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si dimostri che
$$L\mathbf{P}_n \subsetneq \mathbf{P}_n$$
cioe' a. e b. sono entrambe false. Questo esempio viola quanto dimostrato nei primi due punti?