COGNOME			**A**
NOME			
N. MATRICOLA		**Laurea** ☐ **Diploma** ☐	**Anno di Corso** 1 2 3 4 FC

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

Milano, 9 febbraio 2004

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt[4]{\frac{\log\left(\frac{1}{1+y^2}\right)}{x^2 - x^4 - 1}}$$

determinare e rappresentare graficamente il suo campo di esistenza, specificandone l'insieme dei punti interni e dei punti di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso o aperto o né chiuso né aperto. Calcolare poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f in $(0, \sqrt{e-1})$.

2) Detta $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare tale che $F(e_1) = 3(e_1 + e_2 + e_3)$, $F(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 + e_3$ e $F(-e_1 + e_2 + e_3) = \mathbf{0}$ (per determinare $F(e_2)$ e $F(e_3)$ utilizzare la linearità di F). Si chiede di:

2.1) scrivere la matrice di rappresentazione di F (rispetto alla base canonica);

2.2) determinare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di F;

2.3) dire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $F(v) = (1,\ 0,\ 1)^T$.

3) Si stabilisca se la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e si determini una base per l'autospazio relativo ad un autovalore di B a scelta.

4) Studiare il segno della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sqrt{3}x_1^2 + 2x_1x_2 - \sqrt{3}x_2^2 - x_3^2 + 2\sqrt[4]{2}x_1x_3 + 2\sqrt[4]{12}x_2x_4 - 2x_4^2.$$

5) Dare la definizione di base, di dimensione e di sottospazio di uno spazio vettoriale.

6) Si dimostri che k vettori non nulli dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, a due a due ortogonali, sono linearmente indipendenti.