COGNOME		**A**
NOME		
N. MATRICOLA	Laurea ☐ Diploma ☐	Anno di Corso 1 2 3 4 FC

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

Milano, 21 novembre 2003

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\log \frac{1}{\log xy}}$$

determinare e rappresentare graficamente il suo campo di esistenza, specificandone l'insieme dei punti interni e dei punti di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso o aperto o né chiuso né aperto. Calcolare poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f in $(\frac{1}{e}, e^3)$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 6x_3 + 12x_4 \\ x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Si chiede di:

2.1) scrivere la matrice di rappresentazione di T (rispetto alla base canonica);

2.2) determinare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di T;

2.3) dire se $T^{-1}(b)$ (immagine inversa del generico vettore $b \in \mathbb{R}^2$) è sempre un insieme non vuoto o esistono vettori $b \in \mathbb{R}^2$ per cui $T^{-1}(b) = \emptyset$.

3) Si stabilisca se la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\pi \\ \pi & 2 & 0 \\ \pi^{-1} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e si determini una base per l'autospazio relativo a ciascun autovalore di B.

4) Studiare il segno della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -4x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2 + 4x_2x_4 - x_4^2.$$

5) Si enunci il Teorema di Cramer e si dimostri la sufficienza della condizione in esso menzionata.

6) Si definisca la moltiplicazione righe per colonne tra matrici e si enuncino alcune delle proprietà di cui essa gode.