COGNOME		**A**
NOME		
N. MATRICOLA	Laurea ☐ Diploma ☐	Anno di Corso 1 2 3 4 FC

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

Milano, 8 luglio 2003

1) Data la funzione

$$f(x,y)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{e^{x^2}-e^{y^2}}$$

determinare e rappresentare graficamente il suo campo di esistenza, specificandone l'insieme dei punti interni e di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso o aperto o né chiuso né aperto. Calcolare poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f in $(2,1)$.

2) Sia $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-x_2+x_3\\-5x_2-x_3\\-2x_1+14x_2+2x_3\\x_1+8x_2+2x_3\end{pmatrix}.$$

Si chiede di:

2.a) calcolare la matrice di rappresentazione di T;

2.b) determinare una base per il nucleo di T;

2.c) determinare una base per l'immagine di T.

3) Stabilire se la matrice

$$A=\begin{pmatrix}12&10&10\\-2&0&-2\\-10&-10&-8\end{pmatrix}$$

risulta diagonalizzabile e, nel caso lo sia, costruire una matrice modale per A.

4) Studiare il segno della forma quadratica $q:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}$

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=-2x_1^2+8x_1x_2-8x_2^2-2x_1x_3-x_3^2-x_4^2.$$

5) Dopo aver precisato cosa si intende per base di uno spazio vettoriale, dimostrare l'unicità della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare dei vettori di una base.

6) Elencare le proprietà di una norma definita su uno spazio vettoriale. Dopo aver definito la norma euclidea, enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.