COGNOME															
NOME															

N. MATRICOLA ☐☐☐☐☐☐ Laurea ☐ Diploma ☐ Anno di Corso 1 2 3 4 FC

A

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

CORSO DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

A.A. 2002-2003 - SECONDA PROVA PARZIALE

Milano, 10 giugno 2003

1) Detta $\mathcal{B} = \{e^1, e^2, e^3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare tale che $T(e^1) = (4,\ 0,\ -2)^T$, $T(e^1 - 2e^2 + e^3) = (7,\ -20,\ -11)^T$, $T(e^3) = (1,\ 4,\ 1)^T$. Si chiede di:

1.a) ricavare la matrice che rappresenta T e l'espressione di $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

1.b) determinare il nucleo e l'immagine di T;

1.c) dire se $T^{-1}(b)$ (immagine inversa del generico vettore $b \in \mathbb{R}^3$) è sempre un insieme non vuoto o esistono vettori $b \in \mathbb{R}^3$ per cui $T^{-1}(b) = \emptyset$.

2) Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - t = -1 \\ 2y + 3z + 2t = 0 \\ -x + 3z + 3t = 1. \end{cases}$$

Si determini poi il sottoinsieme formato dalle soluzioni che risultano ortogonali al vettore $(-1,\ 0,\ 3,\ 0)^T$.

3) Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -24 & 3 & 17 \end{pmatrix}.$$

risulta diagonalizzabile. Si determini inoltre una base per l'autospazio relativo a ciascun autovalore di A.

4) Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -16x_1^2 + 8x_1x_2 - x_2^2 + 16x_1x_4 - 4x_2x_4 - 4x_4^2.$$

Determinare il segno di q applicando le condizioni sul segno dei minori alla matrice dei coefficienti di q.

5) Enunciare la condizione di Capelli per l'esistenza di una soluzione in un sistema di equazioni lineari e provarne la sufficienza.

6) Si definisca la relazione di similitudine tra matrici quadrate e si enuncino le proprietà di cui essa gode.