COGNOME | | A
NOME | |
N. MATRICOLA | | Laurea ☐ Diploma ☐ Anno di Corso 1 2 3 4 FC

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

Milano, 24 giugno 2002

1) Si determini il campo di esistenza della funzione $f(x, y) = \sqrt{y(x^2 - y^2 - 1)}$ precisando se esso è un insieme aperto oppure chiuso. Stabilire poi se esistono e, in caso affermativo, calcolare le derivate parziali di f in $(0, 0)$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2t = 1 \\ 3x + 7y + z - 2t = 3 \\ x + y - 5z + 10t = 1 \end{cases}$$

determinarne una soluzione che sia ortogonale ad entrambi i vettori $(1, 0, 0, 0)^T$ e $(0, 0, 5, -9)^T$.

3) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare che agisce nel modo seguente sui vettori della base canonica $\mathcal{B} = \{e^1, e^2, e^3\}$ di $\mathbb{R}^3$: $T(e^1) = (2^{k+1}, 1, 0)^T$, $T(e^2) = (0, k + 2, 1 - k)$ e $T(e^3) = (1, 2^{k^2+k}, 0)^T$, ove k è un parametro reale.

3.1) Scrivere la matrice di rappresentazione di T_k.

3.2) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ si ha che $\ker T_k \neq \{(0, 0, 0)^T\}$ e fornire una base per $\operatorname{Im} T_k$ in corrispondenza a tali valori del parametro.

4) Si stabilisca se le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -20 & 5 \\ 0 & -41 & 10 \\ 0 & -180 & 44 \end{pmatrix}$$

sono tra loro simili (suggerimento: studiare la diagonalizzabilità delle due matrici).

5) Dimostrare che k vettori non nulli, a due a due ortogonali, sono linearmente indipendenti.

6) Definire cosa si intende per forma quadratica semidefinita negativa ed enunciare una condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma quadratica sia semidefinita negativa.