COGNOME															
NOME															
N. MATRICOLA															

A

Laurea ☐ Diploma ☐ Anno di Corso 1 2 3 4 FC

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

SECONDA PROVA PARZIALE

Milano, 07 giugno 2002

1) Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare che trasforma i vettori della base canonica $\mathcal{B} = \{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ di $\mathbb{R}^4$ ordinatamente nei vettori $(2,0,0)^T$, $(-1,2,1)^T$, $(0,4,2)^T$ e $(3,-4,-2)^T$. Si chiede di:

1.a) determinare la matrice che rappresenta T e l'espressione di $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

1.b) determinare l'immagine di T;

1.c) determinare (se esiste) l'immagine inversa del vettore $(2,2,2)^T \in \mathbb{R}^3$, ovvero $T^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Determinare (se esistono) due soluzioni tra loro ortogonali del sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 7z = 0 \\ -2x + 3y - 5z - t = 1 \\ x + 3z - 2t = 2. \end{cases}$$

3) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.1) Stabilire se A è diagonalizzabile.

3.2) Costruire una matrice modale V non singolare.

3.3) Determinare un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a tutti i vettori del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di V.

4) Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 3x_4^2.$$

Determinare il segno di q applicando le condizioni sul segno dei minori della matrice simmetrica che rappresenta q.

5) Enunciare il teorema di Capelli e dimostrare la sufficienza della condizione per l'esistenza di soluzioni da esso indicata.

6) Precisare cosa significa che due matrici sono simili ed enunciare le proprietà della relazione di similitudine tra matrici.