COGNOME																A
NOME																

N. MATRICOLA [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] Laurea [ ] Diploma [ ] Anno di Corso [1] [2] [3] [4] [FC]

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

Milano, 13 febbraio 2002

1) Dopo aver determinato il campo di esistenza della funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{\sqrt{4x+y^2}}{2|x|+|y|}\right),$$

indicarne l'insieme dei punti di accumulazione, interni e di frontiera. Precisare poi se il campo di esistenza è un insieme chiuso e/o aperto.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ -x + y + 2z - t = 0 \\ x - y + 4z - 3t = 0 \end{cases}$$

trovare una base per lo spazio delle sue soluzioni.

3) Determinare una base per gli autospazi associati a ciascun autovalore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire se essa è diagonalizzabile. Nel caso non lo sia, esibire un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non possa essere ottenuto come come combinazione lineare di autovettori di A (Suggerimento: scelto un autovettore relativo a ciascun autovalore, costruire un terzo vettore di $\mathbb{R}^3$ in modo che la matrice avente tali vettori come colonne abbia determinante ...).

4) Sia

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice di rappresentazione di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si chiede di

4.a determinare l'espressione di $T = T(x,y,z,t)$;

4.b indicare una base per il nucleo di T;

4.c indicare la controimmagine attraverso T del vettore $(2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ (ovvero l'insieme $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ T(x,y,z,t) = (2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}\}$).

5) Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di una matrice e dimostrarne la necessarietà.

6) Enunciare le principali proprietà del determinante di una matrice quadrata.