A

Cognome: .... Nome: .... Matricola:

Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed Economiche
Corso di laurea di primo livello in Statistica e Gestione delle Informazioni
Algebra Lineare - 21 Novembre 2008

1. Sia data la seguente funzione
$$f(x,y) = \log\left(4 - (|x|-1)^2 - y^2\right) + \log\left(x^3 - |xy|\right).$$
   (a) Si determini analiticamente e si rappresenti graficamente il suo campo d'esistenza.
   (b) Si calcolino le derivate parziali prime di f in $(x,y) \in C.E.(f) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}$.

2. Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da
$$T_k(e^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad T_k(e^1+e^2) = \begin{pmatrix} k+1 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}, \quad T_k(e^1+e^2+e^3) = \begin{pmatrix} 1+2k \\ k \\ 1+2k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R},$$
   dove e^1, e^2, e^3 sono i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$, e sia $b_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$.
   (i) Si scriva la matrice di rappresentazione di T_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (ii) Si stabilisca per quali valori di k è $T_k^{-1}(b_k) \neq \emptyset$.
   (iii) Si studi la diagonalizzabilità di T_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Si calcoli una base ortonormale per il complemento ortogonale dell'insieme
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Date le matrici
$$A_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 10 & \alpha & -4 \\ -7 & \beta & \gamma^2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$
   si determinino α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ in modo che $A_{\alpha,\beta,\gamma} \sim B$.

5. Si studi la segnatura della forma quadratica $q_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$$q_h(x) = -\frac{h^2}{2+h^2}\, x_1^2 + 2x_1x_2 - h^2x_2^2 + 2x_2x_3 - \frac{2}{1+h^2}\, x_3^2,$$
   al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

6. Sia data la trasformazione lineare $\Lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
   (i) Si dimostri che vale l'uguaglianza $\operatorname{Ker}\Lambda^T = (\operatorname{Im}\Lambda)^\perp$.
   (ii) Usando l'uguaglianza di cui sopra, si deduca che $\operatorname{Im}\Lambda = (\operatorname{Ker}\Lambda^T)^\perp$.
   (iii) Sia $b \in \mathbb{R}^m$. Si dimostri che il sistema lineare $\Lambda x = b$ ammette soluzione sse $\langle b, v\rangle = 0$, per ogni v soluzione del sistema $\Lambda^T y = 0$.