

COGNOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

N. MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

Laurea

Diploma

Anno di Corso 1 2 3 4 FC

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

Milano, 9 luglio 2001

Esercizio 1

1a. Si dica cosa significa che $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una trasformazione lineare.

1b. Si porti un esempio di una trasformazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che non sia lineare, fornendone una motivazione.

Esercizio 2

È data una matrice quadrata A di ordine 3. Si supponga che i suoi autovalori siano

$$\lambda_1 = 1 \text{ di molteplicità } 1 \text{ e } \lambda_2 = 2 \text{ di molteplicità } 2.$$

Per ciascuna delle affermazioni seguenti, se ne affermi la verità oppure se ne evidenzi la falsità attraverso un controesempio.

2a. A è simmetrica in quanto gli autovalori sono reali;

2b. il polinomio caratteristico di A è (a meno del segno) $P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$;

2c. A è non singolare.

Esercizio 3

Data la trasformazione $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix},$$

3a. si dimostri che T è lineare;

3b. si scriva la matrice di rappresentazione di T ;

3c. si determini la dimensione dell'immagine di T ;

3d. si determini il nucleo di T .

Esercizio 4

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si determini una matrice modale di A .

Esercizio 5

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si dimostri che le soluzioni del sistema $Ax = 0$ coincidono con le soluzioni di $A^n x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. (Suggerimento: si calcolino A^2 e A^3 e si cerchi di scrivere l'espressione generale di A^n .)

Esercizio 6

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{(y^2 - x)(1 - \ln^2 x)},$$

6a. si disegni sul piano cartesiano il dominio di f ;

6b. si calcoli il gradiente di f nel punto $(1, 2)$.