

COGNOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

N. MATRICOLA

--	--	--	--	--	--	--	--

Laurea

Diploma

Anno di Corso

1	2	3	4	FC
---	---	---	---	----

Questo foglio DEVE essere consegnato alla fine della prova. Utilizzare inoltre per lo svolgimento del tema solo fogli timbrati.

ESAME DI ALGEBRA LINEARE (semestrale)

Milano, 22 giugno 2001

Esercizio 1

Si dimostri la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

Successivamente, relativamente a due vettori non nulli, si forniscano:

- un esempio in cui la disuguaglianza è verificata in senso stretto;
- un esempio in cui è verificata come uguaglianza.

Esercizio 2

Sia A una matrice simmetrica. Per ciascuna delle affermazioni seguenti, se ne affermi la verità oppure se ne evidenzi la falsità attraverso un controesempio.

2a. A ha autovalori distinti;

2b. A ha n autovettori indipendenti;

2c. se u e v sono due autovettori distinti associati allo stesso autovalore λ , allora u e v sono proporzionali (cioè esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, tale che $u = \alpha v$).

Esercizio 3

Data l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{con} \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

3a. si scriva la matrice di rappresentazione di f ;

3b. si determini una base del nucleo di f ;

3c. si determini una base dell'immagine di f .

Esercizio 4

È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4a. Si calcoli l'unico autovalore reale di A ;

4b. è vero che l'autospazio associato all'autovalore reale coincide con il nucleo di f (punto 3b) ?

Esercizio 5

Si determini una base dello spazio delle soluzioni del sistema (omogeneo)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 0 \\ 4x - 3y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(x - y) - \ln(x^2 - y)},$$

6a. si disegni sul piano cartesiano il dominio di f ;

6b. si dica se f ha punti stazionari interni al dominio.