COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 20 novembre 2007

Esercizio 1

Sia $f(x,y) = \log\left(\dfrac{1-\log(xy)}{2-\log(x^2+y^2)}\right)$.
(1a) si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza $\mathcal{D}$ di f;
(1b) si dica se $\mathcal{D}$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso;
(1c) si calcoli la derivata parziale di f rispetto ad x nei punti del primo quadrante interni a $\mathcal{D}$.

Esercizio 2

Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T_a(x_1, x_2, x_3)^T = \Big(ax_1 + 2x_2, x_1 - ax_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + ax_3\Big)^T,$$

(2a) si determini il valore di a per il quale nessuno dei due sottospazi (di $\mathbb{R}^3$) $\operatorname{Im} T_a$ e $\ker T_a$ è banale (cioè si riduce al solo vettore nullo);
(2b) per tale valore di a si determini una base del nucleo ed una base dell'immagine di T_a;

Esercizio 3

Si dica se il vettore $(1,2,3)$ appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Esercizio 4

Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale α per cui è diagonalizzabile la matrice

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5

Sia T la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(5a) Si dimostri che U è una matrice ortogonale.
(5b) Detti u^1, u^2, u^3 i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$, si determini la norma euclidea di $T(u^1), T(u^2), T(u^3)$ senza calcolare esplicitamente i tre vettori.