COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 21 novembre 2006

Esercizio 1

Sia $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1 - \log^2(x + y)}{1 - \log^2(xy)}}$.
(i) si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di f;
(ii) si dica se $\mathcal{D}$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso;
(iii) si calcoli la derivata parziale di f rispetto ad y nei punti interni a $\mathcal{D}$;
(iv) si calcoli la derivata parziale rispetto ad x della funzione $g(x, y) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$ nel punto $(1, 1)$.

Esercizio 2

Si dica se l'insieme $S = \Big\{(x, y, x + |y|) : x, y \in \mathbb{R}\Big\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3

Sia $\{T_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ la classe delle trasformazini lineari rappresentate dalle matrici

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(i) Si trovi, al variare di α, la dimensione di $\operatorname{Im} T_\alpha$;
(ii) Per il valore di α per cui $\dim \operatorname{Im} T_\alpha = 2$ si calcoli una base di $\operatorname{Im} T_\alpha$ e una base di $\ker T_\alpha$.

Esercizio 4

Si calcolino gli autovalori ed una base dei relativi autospazi della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5

Si studi, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità della matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t^2 & 1 & 1 \\ 0 & -t & t \\ 0 & t & -t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6

Data la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definita da

$$q(x, y, z, t) = (x - y)^2 - (y + z)^2 + t^2$$

(i) Si provi che è indefinita, utilizzando soltanto la definizione e l'espressione analitica di q.
(ii) Si verifichi quanto espresso al punto precedente con le regole sul segno dei minori.