| | |
|---|---|
| **COGNOME** | |
| **NOME** | |
| **MATRICOLA** | |

**ESAME di ALGEBRA LINEARE**
**Milano, 30 novembre 2005**

## Esercizio 1

Data la funzione $f(x,y) = \log\left(e^{8/x^2} - e^{|xy|}\right)$,
(i) si determini e si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza $\mathcal{D}$;
(ii) si dica se il campo di esistenza è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, specificandone l'insieme dei punti interni e di frontiera;
(iii) si calcolino le derivate parziali di $f$ nel punto $(-1,1)$.

## Esercizio 2

Data la trasformazione lineare $T_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro reale $a$ e rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ a-1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(i) si determinino gli eventuali valori di $a$ per cui $\ker T_a \neq \left\{(0,0,0,0)^T\right\}$;
(ii) Per $a = 2$ si determini una base di $\ker T_a$ e una base di $\mathrm{Im} T_a$.

## Esercizio 3

Si risolva il sistema di equazioni lineari $\begin{cases} x - y + t = 0 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + y + 2z + 3t = -2. \end{cases}$

## Esercizio 4

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si determinino una matrice ortogonale $P$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $D = P^T A P$.

## Esercizio 5

Date le due matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ k^2 & -1 & k \\ 2 & 2k & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt[3]{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

si determinino i valori di $k$ per cui le due matrici sono simili.

## Esercizio 6

Studiare, con il metodo basato sul segno dei minori, il segno della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$,

con $q(x) = x^T Q x \quad (x \in \mathbb{R}^4) \qquad \text{e} \qquad Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$