COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 13 settembre 2006

Esercizio 1

Sia $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}}} + \log\left(e^{2/(x+y)} + e^{1/(x+y)}y^3 + y^6\right)$.
(i) si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di f;
(ii) si dica se $\mathcal{D}$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso;
(iii) si calcolino le derivate parziali di f in un punto interno al campo di esistenza.

Esercizio 2

Siano $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ le due trasformazioni lineari definite da

$$T(x_1,x_2,x_3)^T = (x_1 - x_3, -x_2 + x_3, -x_1 + x_2, x_1 - x_3)^T \quad \text{e} \quad S(y_1,y_2,y_3,y_4)^T = (y_1 + y_3, y_2 + y_4)^T$$

e sia inoltre $F = S \circ T$.
(i) Si calcoli $F(x_1,x_2,x_3)^T$.
(ii) Si determinino una base di $\ker F$ e $\mathrm{Im} F$.
(iii) È vero che $\ker T \subseteq \ker F$?

Esercizio 3

Siano

$$v^1 = (k,1,1)^T \quad , \quad v^2 = (0,k-1,0)^T \quad , \quad v^3 = (1,1,k)^T$$

e sia $S_k = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle v^i, x\rangle = 0, i = 1,2,3\right\}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:
(i) $S_k \neq \emptyset$.
(ii) $S_k \neq \{(0,0,0)^T\}$; in tal caso si calcoli esattamente S_k.

Esercizio 4

Si studi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità della matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ \alpha - 1 & \alpha^2 & \alpha - 1 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

Esercizio 5

Sia T la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice $U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
(i) Si dimostri che T è una trasformazione ortogonale.
(ii) Si stabilisca se la trasformazione T è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli la matrice che rappresenta la trasformazione T^{-1}.

Esercizio 6

Data la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definita da

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 3x_2^2 + 6x_2x_4 + 3x_3^2 + 2x_3x_4 + 4x_4^2,$$

si dica, motivando la risposta, se è garantita l'esistenza di almeno un vettore $z \in \mathbb{R}^4$, con $z \neq 0$, tale che $q(z) = 0$.