COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 20 settembre 2005

Esercizio 1

Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{\log(e^{-2x^2} - 3ye^{-x^2} + 2y^2)}{\sqrt{\sqrt[3]{|x|} - y + 1}}$,

(i) si determini e si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza $\mathcal{D}$;
(ii) si dica se il campo di esistenza è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, specificandone l'insieme dei punti interni e di frontiera;
(iii) si calcolino le derivate parziali di f nel punto $(0,0)$.

Esercizio 2

Sia $\{T_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ la classe delle trasformazioni lineari $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentate dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si determini il valore di α per cui $\mathrm{Im}T_\alpha$ ha dimensione 2. Di tale trasformazione si calcoli una base del nucleo e una base dell'immagine. Infine si stabilisca se il vettore $(5,4,3)^T$ appartiene all'immagine di tale trasformazione.

Esercizio 3

Si discuta il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, calcolando, quando possibile, l'insieme delle soluzioni: $\begin{cases} k^2x + k^3y + k^4z = k - 2 \\ x + y + z = -k \\ y + 3z = k + 1. \end{cases}$

Esercizio 4

Si calcolino gli autovalori ed una base dei relativi autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5

Si discuta, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità della matrice $B_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a+1 & a & 0 \\ a & a-1 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6

Studiare, con il metodo basato sul segno dei minori, il segno della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $q(x) = x^TQx \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ e $Q = \begin{pmatrix} -32 & -20 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & -2 & -2\sqrt{2} \\ -4 & 4 & 4\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.