COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 19 luglio 2006

Esercizio 1 Sia

$$f(x,y) = \log \frac{\log(x^2+y^2)}{\log(x^2-y^2)}.$$

(i) Si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza $\mathcal{D}$ di f.
(ii) Si dica se $\mathcal{D}$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso e si indichi l'insieme dei suoi punti interni.
(iii) Si calcolino le derivate parziali di f nel punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Esercizio 2 Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, con $k \in \mathbb{R}$, la trasformazione lineare definita da

$$T_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + k^2 z \\ 4x + ky + 4z \\ k^2 x + kz \\ x + z \end{pmatrix}.$$

(i) Si scriva la matrice di rappresentazione di T_k.
(ii) Si studi, al variare di k, la dimensione del $\ker T_k$.
(iii) Si trovino i valori di k per cui T_k è iniettiva e i valori per cui è suriettiva.

Esercizio 3 Detta $\mathcal{B} = \{u^1, u^2, u^3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare tale che

$$F(u^1) = (4,3,2,1)^T \quad , \quad F(u^2) = (3,1,-1,-3)^T \quad , \quad F(u^3) = (-1,-2,-3,-4)^T.$$

Si calcoli $F^{-1}\left\{(-5,-5,-5,-5)^T\right\}$, specificando se si tratta di un sottospazio vettoriale.

Esercizio 4 Si studi, al variare del parametro reale α, la diagonalizzabilità della matrice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, si calcoli A^k, con $k \in \mathbb{N}$ (suggerimento: si sfrutti la diagonalizzabilità di A).

Esercizio 6 Data la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1^2 + 2\sqrt{5}x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3\sqrt{2}x_2^2 + 2\sqrt{5}x_2x_4 - 3x_3^2 - 10x_3x_4 - 10x_4^2,$$

si stabilisca se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ con la proprietà che $q(v) > 0$.