COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 12 luglio 2005

Esercizio 1

Data la funzione $f(x,y) = \log\Big[(1-x^2-y^2)\log(|x|-y^2)\Big]$,
(i) si determini e si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza $\mathcal{D}$;
(ii) si dica se il punto $(1,0)$ è interno, esterno o di frontiera per $\mathcal{D}$, motivando la risposta;
(iii) si calcolino le derivate parziali di f nei punti di $\mathcal{D}$ che appartengono al primo quadrante.

Esercizio 2

(i) Indicata con $\{u^1, u^2, u^3\}$ la base fondamentale di $\mathbb{R}^3$, si scriva una trasformazione lineare

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

che abbia per immagine il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori u^1 e $u^1 + u^2$;
(ii) Si determini il nucleo di T e si dica se $\ker T$ è ortogonale a $\mathrm{Im}T$;
(iii) Si trovino tutte le trasformazioni con la proprietà richiesta e tali che $\ker T$ sia ortogonale a $\mathrm{Im}T$.

Esercizio 3

Si discuta il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, calcolando, quando possibile, l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + k^2 y = -2 \\ -x + y = -k^2 + 3k - 4 \end{cases}$$

Esercizio 4

(i) Si calcolino gli autovalori ed una base dei relativi autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Si dica se ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ si può scrivere come c.l. di autovettori di A e si fornisca un esempio in caso contrario.

Esercizio 5

Si discuta la diagonalizzabilità della seguente matrice, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6

Si stabilisca se sono simili le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$