

COGNOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

ESAME di ALGEBRA LINEARE

Milano, 26 giugno 2007

**Esercizio 1**

Sia  $f(x, y) = \sqrt{\left(xy - \frac{1}{y^2}\right)} (1 - \log^2 y)$ .

- (i) si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di  $f$ ;
- (ii) si dica se  $\mathcal{D}$  è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso;
- (iii) si calcolino le derivate parziali di  $f$  nei punti interni a  $\mathcal{D}$ .

**Esercizio 2**

Sia  $T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la trasformazione lineare definita da

$$T_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + 2x_2 - ax_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Si dica per quali valori reali di  $a$  la trasformazione  $T_a$  risulta non invertibile;
- (ii) Per i valori trovati al punto (i) si determinino due basi del nucleo e dell'immagine di  $T_a$ ;
- (ii) Si dica se per  $a = 0$  all'immagine di  $T_a$  appartengono tutti e tre i vettori fondamentali di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 3**

Si dica se esistono valori reali di  $k$  per cui il sistema

$$\begin{cases} kx + 2y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ x - y + 2z = k \end{cases}$$

ha un'unica soluzione.

**Esercizio 4**

(i) Si determini una matrice che diagonalizza la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Si dica se tra le matrici che diagonalizzano  $M$  ne esiste una con autovalori nulli.
- (iii) Si dica se tra le matrici che diagonalizzano  $M$  ne esiste una con autovalori di modulo unitario.

**Esercizio 5**

Data la forma quadratica

$$q(x, y, z, t) = -x^2 + 4xy - 2xz + 2xt - 4y^2 + 4yz - 4yt - z^2 + 2zt - t^2,$$

- (i) si verifichi, con le regole sul segno degli opportuni minori, che la forma è semidefinita negativa;
- (ii) si determini la dimensione del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  in cui la forma si annulla.