COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 28 giugno 2006

Esercizio 1 Sia $f(x,y) = \log\left(\dfrac{e^{2y} - x^4}{e^x - y^3\sqrt{e^x} + y^6}\right) + \sqrt{|x-y| - ||x| - |y||}$.
(i) si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di f;
(ii) si dica se $\mathcal{D}$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso;
(iii) si calcolino le derivate parziali di f nel punto $(1, \sqrt[6]{e})$.

Esercizio 2 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare tale che

$$F(u^1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(u^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(u^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(u^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Si calcoli la matrice di rappresentazione della trasformazione composta $F \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;
(ii) Si determini una base di $\ker(F \circ T)$ e una base di $\mathrm{Im}(F \circ T)$;
(iii) Si stabilisca se $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ e^{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(F \circ T)$.
(iv) T è iniettiva ?

Esercizio 3 Si discuta, al variare del parametro reale k, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2kx + ky = 1 - |k| \\ 6x + 3y = 0 \\ x + (2-2k)y = k. \end{cases}$$

Esercizio 4 Si studi, al variare del parametro reale k, la diagonalizzabilità della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k - \sqrt{2} & k^2 & k - \sqrt{2} \\ k & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 Stabilire se sono simili le due matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6 Sia $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 5x_2^2 + 2x_2x_4 - 6x_3^2 + 4x_3x_4 - x_4^2.$$

Si stabilisca se esiste una coppia di vettori $u, v \in \mathbb{R}^4$ tali che $q(u) < 0 < q(v)$.