COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 22 giugno 2005

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{|\,|x| - |y|\,|^3 - 1} + \log\log(x^2 + y^2)$$

determinare e rappresentare graficamente il suo campo di esistenza, specificandone l'insieme dei punti interni e dei punti di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso, aperto o né chiuso né aperto. Calcolare poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f in $(-3, 1)$.

Esercizio 2

Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare individuata dalle relazioni:

$$F(u^1) = (9,\ -4,\ 1)^T,\ F(u^2) = (1,\ -4,\ 9)^T,\ F(u^3) = (2,\ 0,\ -2)^T \text{ e } F(u^4) = (0,\ 8,\ -20)^T,$$

dove u^i rappresenta l'i-esimo vettore fondamentale.
(i) Calcolare $F(x)$, con $x \in \mathbb{R}^4$.
(ii) Determinare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di F.
(iii) Stabilire se il vettore $v = (0,\ 0,\ 1)^T$ appartiene all'immagine di F.

Esercizio 3

Si discuta il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, calcolando l'insieme delle soluzioni quando è possibile.

$$\begin{cases} 4x + e^{k^2}y &= -4 \\ -x + ky &= 1 - k \\ x + y &= -1. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si calcolino gli autovalori ed una base dei relativi autospazi per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & 1 \\ \pi & \pi^2 & 1 \\ \pi & \pi^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5

Si discuta la diagonalizzabilità della seguente matrice al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6

Studiare, con il metodo basato sul segno dei minori, il segno della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad = \quad & x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3 + 2\sqrt{3}x_1x_4 + 4\sqrt{2}x_2x_3 + 4x_3^2 \\ & 2\sqrt{6}x_2x_4 + 4\sqrt{3}x_3x_4 + 3x_4^2. \end{aligned}$$