COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Prima prova parziale
Milano, 2 maggio 2007

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left[\left(\frac{y}{x} - x^2\right)(e^y - 1)\right],$$

i) si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di f;
ii) si dica se si tratta di un insieme chiuso o aperto o né chiuso né aperto;
iii) si calcolino poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f nel punto $(1,-1)$.

Esercizio 2

Si stabilisca quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, giustificando adeguatamente la risposta:

i) $S_1 = \Big\{ v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, (0,1,-1) \rangle = 0 \Big\}$;

ii) $S_2 = \Big\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, 0),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \Big\}$;

iii) $S_3 = \Big\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = (\alpha, \beta, \alpha\beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Big\}$.

Esercizio 3

Siano T ed S le trasformazioni lineari così definite:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

e

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

i) Si scrivano le matrici di rappresentazione di T ed S (rispetto alle basi canoniche).
ii) Si determini la legge con cui opera la trasformazione lineare $S \circ T$.
iii) Si determini una base per il nucleo di $S \circ T$ ed una base per l'immagine di $S \circ T$.

Esercizio 4

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \alpha\right) \quad , \quad v^2 = \left(\beta, -\sqrt{2}\alpha, \alpha\right) \quad , \quad v^3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

si dica per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ essi sono ortonormali (rispetto al prodotto interno standard). Per tali valori di α e β
i) si dica se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, motivando opportunamente la risposta;
ii) si esprima, se possibile, il vettore $v = \left(1, -\sqrt{3}, 0\right)$ come combinazione lineare di v^1, v^2, v^3.