COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Seconda prova parziale
Milano, 26 maggio 2006

Esercizio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare che ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -7 & -3 & 9 \\ 4 & 16 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

per matrice di rappresentazione.

1. Si indichi l'immagine attraverso T del generico vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$;
2. Si calcoli il rango di T;
3. Si determini una base per il nucleo ed una base per l'immagine di T.

Esercizio 2

Sia $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T_k(u^1) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k^2 \end{pmatrix}, \quad T_k(u^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k^2 - k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_k(u^3) = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}, \quad T_k(u^4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Si studi la nullità di T_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Data la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix},$$

si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a è invertibile e si scriva, quando possibile, M_a^{-1}.

Esercizio 4

Data la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$f(x, y, z)^T = (x + y + z, x + 2y - 2z, x + 3y - 5z)^T,$$

si dica se il vettore $v = (-3, -1, 1)^T$ appartiene all'immagine di f, indicando comunque la sua controimmagine (inversa immagine) $f^{-1}\{v\}$. Si precisi infine se tale insieme è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5

Si studi, al variare del parametro reale k, il sistema

$$\begin{cases} x - y = k \\ -2x + ky = -2 \\ 2x - 2y = -4, \end{cases}$$

calcolando, quando possibile, le soluzioni.