COGNOME															
NOME															
MATRICOLA															

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Seconda prova parziale
Milano, 16 maggio 2005

Esercizio 1

Data la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix},$$

si scriva la relativa matrice di rappresentazione e si determinino una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

Esercizio 2

È data la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, univocamente individuata dalle seguenti condizioni:

$$T_k(u^1) = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T_k(u^2) = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T_k(u^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \\ 0 \\ k+4 \end{pmatrix},$$

dove i vettori u^1, u^2, u^3 sono i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$. Si studi il valore del rango di T_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Data la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a è invertibile e si scriva, quando possibile, M_a^{-1}.

Esercizio 4

Data la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_4 \end{pmatrix},$$

si dica se il vettore fondamentale $u^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f e se ne determini la controimmagine (inversa immagine), ovvero $f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5

Si studi, al variare del parametro reale k, il sistema

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ (k+1)x + (k+1)y + 2z = k+1 \\ x + y + kz = k^2, \end{cases}$$

calcolando, quando possibile, le soluzioni.