COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Prima prova parziale
Milano, 4 aprile 2005

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\log^{-1}(x^2+4y^2)},$$

si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di f, specificandone l'insieme dei punti interni e dei punti di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso o aperto o né chiuso né aperto. Si calcolino poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f in $(0,1)$.

Esercizio 2

Si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza della funzione

$$g(x,y) = \frac{\sqrt{3x^2y^2 - x^4y^4 + 4}}{\sin e^{xy} - \sqrt{2+|xy|}} + \log^4(|x| + y|y|).$$

Esercizio 3

Si stabilisca l'esistenza e, dove esistono, si calcolino i valori delle derivate parziali della funzione

$$h(x,y) = |e^x - 2| \log\left(\frac{3}{4} + y^2\right).$$

Esercizio 4

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v^1 = \left(\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2-\sqrt{2}}, 0\right) \quad , \quad v^2 = (0,0,-1) \quad , \quad v^3 = (k\sqrt[4]{2}, -k, 0),$$

si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ essi risultano ortonormali. Dire se per gli stessi valori di k i tre vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, giustificando la risposta. Si esprima il vettore $(1,1,1)$, se ciò è possibile, come combinazione lineare dei vettori di tale base.

Esercizio 5

Si stabilisca quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, giustificando adeguatamente la risposta:

$$S_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2^2 x_3^3 \geq 1\};$$
$$S_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (\alpha, \beta, \sqrt{2}\alpha + \beta),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\};$$
$$S_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (|\alpha|, 0, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 6

Si stabilisca se l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita come segue

$$\langle x, y \rangle = \max\{\|x\|, \|y\|\},$$

dove $\|x\|$ rappresenta la norma euclidea del vettore x, è un prodotto interno.