COGNOME															
NOME															
MATRICOLA															

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Prima prova parziale
Milano, 28 marzo 2006

Esercizio 1

Data la funzione $f(x,y) = \sqrt[8]{(x|x| - y^2 + 1)\sqrt{1-y^6}}$, si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di f, specificandone l'insieme dei punti interni e dei punti di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso o aperto o né chiuso né aperto. Si calcolino poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f nel punto $(1,0)$.

Esercizio 2

Si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza della funzione

$$g(x,y) = \frac{\sqrt{\arctan\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)}}{\log\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)} + \sqrt{\frac{x^2 - y^4}{\sin\frac{1}{x^2+1} - 1}}.$$

Esercizio 3

3.1. Si calcolino le derivate parziali di $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y} + \arctan\dfrac{y}{x}$, nei punti del suo dominio.

3.2. Si calcolino, se esistono, le derivate parziali nell'origine della funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4+xy+y^2} - 1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 4

Si stabilisca quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, giustificando adeguatamente la risposta:

$$S_1 = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, (1,-1,0)\rangle = 1\right\};$$
$$S_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (\alpha, 2\alpha - 3\beta, \beta),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\};$$
$$S_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (\tfrac{\alpha}{\beta}, 0, 0),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0\}.$$

Esercizio 5

Si stabilisca se la funzione $\nu(x,y) = |x| + |y| + \sqrt{|xy|}$ definisce in $\mathbb{R}^2$ una norma, esaminando tutte le proprietà richieste dalla definizione.

Esercizio 6

Si dica per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v^1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad v^2 = (-h, h, 0) \quad , \quad v^3 = \left(\frac{h}{2}, h^3, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

risultano ortonormali. Si dica se per i valori trovati di h i tre vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, giustificando la risposta. Si esprima infine il vettore $(0,-1,1)$, se ciò è possibile, come combinazione lineare dei vettori di tale base.