COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 13 febbraio 2007

Esercizio 1

Sia $f(x,y) = \sqrt{\left(\frac{x}{y} - y^2\right)(xe^y - 1)}$.
(i) si determini e si rappresenti graficamente il campo di esistenza di f;
(ii) si dica se $\mathcal{D}$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso;
(iii) si calcolino le derivate parziali di f nei punti interni a $\mathcal{D}$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $\nu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da $\nu(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + |z|$, e si dica se è una norma.

Esercizio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

(i) Si determini una base dell'immagine di T;
(ii) Si determini una base del nucleo di T.

Esercizio 4

Dato il sistema

$$\begin{cases} k^2x - y + z = 2 \\ 2x + y + z = k \\ x - 4y + 2z = 5 \end{cases}$$

si trovino i valori di k per cui il sistema ha soluzioni e, per tali valori, si risolva il sistema.

Esercizio 5

Si determini una matrice ortogonale che diagonalizza la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6

Si consideri la forma quadratica

$$q(x,y,z,t) = (x+z)^2 + y^2 + (y+z+t)^2.$$

(i) Si determini, con la definizione, il segno della forma quadratica;
(ii) si indichi un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dove la forma quadratica si annulla;
(iii) si giunga allo stesso risultato trovato in precedenza attraverso l'uso dei minori principali della matrice di rappresentazione.