COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 22 febbraio 2006

$\boxed{\textbf{Esercizio 1}}$ Data la funzione $f(x,y) = \log\left((x-|y|)^2 - 1\right) + \sqrt{4-(x+1)^2-y^2}$,
(i) si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza $\mathcal{D}$, specificando se $\mathcal{D}$ contiene punti isolati;
(ii) si dica se $\mathcal{D}$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso;
(iii) si calcolino le derivate parziali di f nel punto $(-1,1)$.

$\boxed{\textbf{Esercizio 2}}$ Data la trasformazione lineare $T_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro reale a e rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{pmatrix},$$

(i) si determinino gli eventuali valori di a per cui $\dim \mathrm{Im} T_a = 2$;
(ii) Per i valori trovati al punto precedente si determini una base di $\ker T_a$;
(iii) Per gli stessi valori si trovi una base del trasformato del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da u^1 e u^2 (primi due vettori fondamentali di $\mathbb{R}^4$).

$\boxed{\textbf{Esercizio 3}}$ Si risolva il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = -1 \\ x - 3y - 2z = 5. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Esercizio 4}}$ Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(i) Si calcolino gli autovalori ed una base dei relativi autospazi della matrice;
(ii) Si dica se ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ si può scrivere come c.l. di autovettori di A.

$\boxed{\textbf{Esercizio 5}}$ Si discuta la diagonalizzabilità della seguente matrice, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Esercizio 6}}$ Data la forma quadratica $q_b : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$q_b(x) = x^T Q_b x \quad (x \in \mathbb{R}^4) \qquad \text{e} \qquad Q_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(i) si verifichi (criterio del segno dei minori) che con $b = 1$ la forma è semidefinita negativa;
(ii) si dica se q_b è semidefinita negativa per ogni valore di b.