COGNOME

NOME

MATRICOLA

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 9 febbraio 2006

Esercizio 1 Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{(2 - \arctan xy)\log(|x^2 - 3| - y^2)}$,
(i) si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza $\mathcal{D}$;
(ii) si dica se il campo di esistenza è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, specificandone l'insieme dei punti interni e di frontiera;
(iii) si calcolino le derivate parziali di f nel punto $(0,0)$.

Esercizio 2 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare tale che

$$T(2e^1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad T(e^1 + e^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -28 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad , \quad T(e^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e^1, e^2, e^3 sono i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$).
Si scriva la matrice di rappresentazione di T, una base per il nucleo ed una base per l'immagine. Infine si precisi se T è iniettiva.

Esercizio 3 Si studi il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - z = k \\ 2x + (k-1)y - 2kz = 0 \\ -x + z = 0 \\ 4x + (1-k)y - 4z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4 Si calcoli lo spettro, si calcoli una base per gli autospazi e si studi la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 - \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 Si studi la diagonalizzabilità della matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a^2 & 4 & 12 \\ 0 & -a & 3a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6 Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, il segno della forma quadratica $q_\beta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$q_\beta(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 - 2x_2^2 + \beta^2 x_2 x_3 - \frac{1}{4}x_3^2.$$