COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 16 febbraio 2005

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{1-x^4}}\sqrt{y \sin y} \ ,$$

si determini e si rappresenti graficamente il suo campo di esistenza, specificandone l'insieme dei punti interni e dei punti di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso, aperto o né chiuso né aperto. Si calcolino poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f in $(0, -\frac{\pi}{2})$.

Esercizio 2

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita dalla legge

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

i) Calcolare la matrice di rappresentazione di T;

ii) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di T;

iii) Stabilire se il vettore $v = (0, 0, 1)^T$ appartiene all'immagine di T.

Esercizio 3

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

si stabilisca se sono tra loro simili.

Esercizio 4

Studiare, con il metodo basato sul segno dei minori principali, il segno della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, con

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2.$$

Esercizio 5

Si dia la definizione di punto interno e di punto di frontiera di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Si dia poi la definizione di insieme aperto e di insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 6

Si enunci e si dimostri il teorema di Cramer.