COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

ESAME di ALGEBRA LINEARE
Milano, 1 febbraio 2005

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{|x|^3 + |y|^5}{x^4y^4 - x^2y^2 + 2},$$

determinare e rappresentare graficamente il suo campo di esistenza, specificandone l'insieme dei punti interni e dei punti di frontiera. Dire se si tratta di un insieme chiuso, aperto o né chiuso né aperto. Calcolare poi, nel caso esistano, le derivate parziali di f in $(1,-1)$.

Esercizio 2

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\beta \in \mathbb{R}$ il sistema $Ax = b$ ammette soluzioni. Si indichi poi l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = 0$. Tale insieme è un sottospazio vettoriale ?

Esercizio 3

Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -21 & -12 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ -42 & -21 & 24 \end{pmatrix},$$

si determinino una matrice Δ ed una matrice invertibile M tali che $\Delta = M^{-1}BM$, giustificandone prima l'esistenza.

Esercizio 4

Studiare, con il metodo basato sul segno dei minori principali, il segno della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, con

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 3x_3^2 + 4x_1x_4 - 4x_4^2.$$

Esercizio 5

Definire la nozione di lineare dipendenza di k vettori in $\mathbb{R}^n$, enunciare una condizione necessaria e sufficiente per la lineare dipendenza e dimostrare la necessità di tale condizione.

Esercizio 6

Definire la nozione di prodotto interno tra vettori di $\mathbb{R}^n$ e la nozione di norma euclidea, elencare le proprietà di quest'ultima ed enunciare la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.