Matematica IIIs – Appello del 29 gennaio 2008

1. Scrivere l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$(i) \quad y'(t) = 2t\, y(t) + e^{t^2};$$

$$(ii) \quad 2\, y''(t) + y'(t) - y(t) = te^{-t} + 2t.$$

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\big(1 + y^2(y-1)^2\big), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione y_α esiste ed è unica e discuterne la regolarità e la prolungabilità.

(ii) Trovare le soluzioni stazionarie dell'equazione $y' = \log\big(1 + y^2(y-1)^2\big)$.

(iii) Studiare il comportamento della soluzione ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) Studiare la convessità/concavità delle soluzioni.

(v) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione per qualche valore significativo di α raccogliendo le informazioni dedotte nei punti (i-iv).

(vi) Le soluzioni di equilibrio dell'equazione $y' = \log\big(1 + y^2(y-1)^2\big)$ trovate nel punto (ii) sono stabili?

3. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 - 1)(y + y^3), \\ \dot{y} = -x(x^2 - 1)(1 + y^2), \end{cases}$$

(i) trovare i punti di equilibrio;

(ii) studiare il sistema linearizzato nei punti critici isolati e dire se si possono trarre conclusioni sulla natura di tali punti nel sistema non lineare;

(iii) trovare un integrale primo e disegnare alcune traiettorie;

(iv) analizzare la natura dei punti critici del sistema non lineare;

(v) discutere l'esistenza di orbite periodiche.