Matematica IIIs – Appello del 28 gennaio 2009

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\log x)\, e^{-y(x)}, \\ y(1) = \alpha, \end{cases}$$

per $x \in (0, +\infty)$. Per quali valori di α la soluzione è prolungabile a tutto $(0, +\infty)$?

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (t^2 - 4)\big(e^{-y^2} - 1\big), \\ \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione y_α esiste ed è unica e discuterne la regolarità e la prolungabilità.

(ii) Trovare le soluzioni stazionarie dell'equazione $y' = (t^2 - 4)\big(e^{-y^2} - 1\big)$.

(iii) Discutere l'esistenza di punti di massimo/minimo locali e il comportamento della soluzione ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione per qualche valore significativo di α raccogliendo le informazioni dedotte nei punti (i-iii).

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(i) determinare e^{tA};

(ii) dire se l'origine è un punto di equilibrio stabile per $\dot{Y} = AY$;

(iii) scrivere l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^t, \\ \dot{y} = -3x + y - 3z + 3 \\ \dot{z} = x + 2z. \end{cases}$$