Matematica IIIs – Appello del 21 novembre 2007

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando, per ogni α, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = e^{y(x)}(x-1), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin\left(\dfrac{2\,\pi\,y}{1+y^2}\right), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione y_α esiste ed è unica e discuterne la regolarità e la prolungabilità.

(ii) Trovare le soluzioni stazionarie dell'equazione $y' = \sin\left(\frac{2\,\pi\,y}{1+y^2}\right)$.
(Suggerimento: verificare prima che $-1 \leq \frac{2\,y}{1+y^2} \leq 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$).

(iii) Studiare il comportamento della soluzione ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) Studiare la convessità/concavità delle soluzioni.

(v) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione per qualche valore significativo di α raccogliendo le informazioni dedotte nei punti (i-iv).

(vi) Le soluzioni di equilibrio dell'equazione $y' = \sin\left(\frac{2\,\pi\,y}{1+y^2}\right)$ trovate nel punto (ii) sono stabili?

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

(i) determinare e^{tA};

(ii) dire se l'origine è un punto di equilibrio stabile per $\dot{Y} = AY$;

(iii) scrivere l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + t, \\ \dot{y} = -5x - 3y - t. \end{cases}$$