MATEMATICA II

19 settembre 2005

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f:\mathbf{R}^3_+ \longrightarrow \mathbf{R}$, con $\mathbf{R}^3_+ = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3:\ x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0\}$, definita da
$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{4x_2} + x_2 + \frac{x_3^2}{x_1} + \frac{2}{x_3}.$$
   (i) Si scriva l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(2,1,2,5)$ e si calcoli la derivata direzionale di f in $(2,1,2)$, nella direzione individuata dal vettore $(1,-1,1)$, giustificandone preliminarmente l'esistenza.
   (ii) Si calcoli la matrice jacobiana della trasformazione $F:\mathbf{R}^3_+ \longrightarrow \mathbf{R}^2$ in $(4,1,4)$, dove $F = g\circ f$ e la funzione $g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}^2$ è definita da $g(t) = (\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s, \mathrm{e}^{-t^2})$.
   (iii) Si scriva la formula di Taylor di f, centrata in $(2,1,2)$ ed arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.
   (iv) Si determinino eventuali estremanti relativi di f in $\mathbf{R}^3_+$.

2. Si determinino gli estremi della funzione $f(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{|x_1-x_2|}$ vincolati all'insieme $\Omega = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2 : x_1\in[0,2],\ x_1^2 - x_1 \le x_2 \le x_1\}$.

3. Siano
$$F(x) = \left(\int_0^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{1}_{[0,101)}(x) + (\mathrm{e}^{10}-1)\mathbf{1}_{[101,+\infty)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathbf{1}_{[n,+\infty)}(x),$$
$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$
Si stabilisca se $f\in\mathcal{RS}_F([0,+\infty))$ e, in caso affermativo, si calcoli $\int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}F$.

4. a. Si calcoli l'integrale
$$\int_D \frac{\mathrm{e}^{-|x_2|}}{x_1^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$
dove $D = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2:\ |x_1|\ge 1,\ |x_1x_2|\le 1\}$.

   b. Si stabilisca se la funzione $h(\mathbf{x}) = x_3 e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$ è Riemann integrabile in senso generalizzato nell'insieme $C = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3:\ x_1^2+x_2^2-x_3^2\le 0\}$. In caso affermativo si calcoli il valore dell'integrale
$$\int_C h(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$