MATEMATICA II

7 luglio 2005

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| \log |\mathbf{x}|.$$

(i) Si disegni il profilo di f.

(ii) Si calcolino l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f nel punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ e la derivata direzionale di $g = \varphi \circ f$ in $(1, 0)$ nella direzione individuata dal vettore $(1, 3)$, dove $\varphi(t) = (1 + t^4)^t$.

(iii) Si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(0, 1)$ ed arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.

(iv) Si determinino eventuali estremi di f, specificando se si tratta di estremi relativi o assoluti.

2. Si determinino gli estremi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ vincolati all'insieme $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : |x_1\, x_2| \geq 1\}$.

3. Siano

$$F(x) = \lfloor \sqrt{\mathrm{e}^x} \rfloor + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^2)^2}, \qquad f(x) = -x^2.$$

Si stabilisca se f è integrabile in $[-4, 4]$ rispetto a F secondo Riemann–Stieltjes e, in caso affermativo, si calcoli $\int_{-4}^{4} f(x)\, \mathrm{d}F(x)$.

4. a. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + |x_3|)^2} \, \frac{1}{1 + x_3^2} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$

Può essere utile trasformare l'integrale mediante coordinate cilindriche.

b. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(4x_1^2 - 2\sqrt{2}x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_3)} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$