MATEMATICA II

24 giugno 2005

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = (2/3)\mathrm{e}^{3|\mathbf{x}|^2} - 3\mathrm{e}^{2|\mathbf{x}|^2} + 4\mathrm{e}^{|\mathbf{x}|^2}.$$

(i) Si disegni il profilo di f.
(ii) Si calcolino l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f nel punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 4\mathrm{e} - 3\mathrm{e}^2 + (2/3)\mathrm{e}^3)$ e la derivata direzionale di $g = \varphi \circ f$ in $(1, 0)$ nella direzione individuata dal vettore $(1, 3)$, dove $\varphi(t) = (1 + t^4)^t$.
(iii) Si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(0, \sqrt{\log 2})$ ed arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.
(iv) Si determinino eventuali estremi di f, specificando se si tratta di estremi relativi o assoluti.

2. Si determinino gli estremi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ vincolati all'insieme $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1,\ x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$.

3. Siano

$$F(x) = x\lfloor \mathrm{e}^x \rfloor + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \qquad f(x) = x^2.$$

Si stabilisca se $f \in \mathcal{RS}_F([0,1])$ e, in caso affermativo, si calcoli $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}F(x)$.

4. a. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + |x_3|)^2} \, \frac{1}{1 + x_3^2} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$

Può essere utile trasformare l'integrale mediante coordinate cilindriche.
b. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(4x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 - 2\sqrt{2}x_1 x_3 + x_3^2)} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$